NOV 13 1930

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

I N H A L T:

HAUPTAUFSÄTZE:

CAUER, Die Siebschaltungen der Fernmeldetechnik / WEINIG, Über die graphische Berechnung der Strömungsverhältnisse und der Leistungsaufnahme in einem gegebenen Turbinenrad / WEINBLUM, Über die Berechnung des wellenbildenden Widerstandes von Schiffen, insbesondere die Hognersche Formel / HERZBERGER, Über die Umgebung eines Strahls in optischen Systemen / BUCHHOLZ, Die magnetische Leitfähigkeit eines unregelmäßig gestalteten Luftzwischenraumes bei parallelebenem Feld / LUKÁCS, Anwendung der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie auf Nomographie / MEHMKE, Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen durch Elimination aufzulösen

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

ng. Mathem. u. Mech. / Berlin, Sept./Okt. 1930 / Bd. 10 / Nr. 5 / Seite 425–524

VERLAG G.M.B.H / BERLIN NW 7

BEZUGSBEDINGUNGEN UND ANZEIGEN-

Neue Bücher über mathematische Volkswirtschaftslehre

Mathematische Volkswirtschaftslehre

Eine Einführung. Von **Dr. O. Weinberger.** 1930. Geb. RM. 18.—

Das Buch bietet eine allseitige und leichtfaßliche Darstellung der mathematischen Behandlung der Volkswirtschaftslehre. Nach einem einleitenden Abschnitt über Wesen, Berechtigung und Vorteile der mathematischen Methode wird ihre geschichtliche Entwicklung aufgezeigt. Der Hauptteil bringt dann in systematischer Folge die mathematische Behandlung der volkswirtschaftlichen Grundbegriffe: Wert und Preis, Zins, Lohn, Grundrente, Tausch, Produktion, Kapitalisation; ferner der Geld- und Steuerlehre, der Lehre von den Zöllen und den Konjunkturschwankungen. In einem Anhang werden die wirtschaftlich-statistisch-mathematischen Grundbegriffe erläutert.

Inhaltsübersicht: I. Von der Rechtfertigung des mathematischen Verfahrens in der Volkswirtschaftslehre. II. Aus der Geschichte der mathematischen Volkswirtschaftslehre. III. Die Hauptprobleme der mathematischen Volkswirtschaftslehre. Die Stammbegriffe der Wirtschaftswissenschaft in ihrer Beziehung zum Gleichgewichtsproblem. Das Problem des allgemeinen wirtschaftlichen Gleichgewichts. Besondere Probleme. IV. Von den Hilfsmitteln der mathematischen Volkswirtschaftslehre. Vom Nutzen der graphischen Darstellung. Von den wichtigen analytischen Hilfsmitteln.

Demnächst erscheint:

Mathematische Forschungen zur Wert- und Preislehre

Von Irving Fisher

Prof. of Political Economy in Yale University (New Haven)

In die deutsche Sprache übertragen von Dr. A. ARON. Gebunden etwa RM. 9,60.

Die deutsche Ausgabe — und zugleich Neuauflage — dieses Werkes, das nach maßgebendem Urteil „eine klassische Theorie" der mathematischen Nationalökonomie enthält, wird begrüßt werden, da Mathematiker und Wirtschaftstheoretiker die Entwicklung der mathematischen Volkswirtschaftslehre mit gleichem Interesse verfolgen. Die Grundgedanken, auf denen sich das Werk aufbaut, sind: Die Wichtigkeit der mathematischen Methode für die Nationalökonomie — Die Möglichkeit einer vorteilhaften Benutzung hydrostatischer Vergleiche und Modelle — Das Studium des Nutzens als einer meßbaren Größe — Die Unabhängigkeit des Nutzens von verschiedenen spezifischen Arten, wie z. B. zwei Arten von Gütern, welche sich ersetzen oder sich gegenseitig ergänzen.

Zu beziehen durch die

VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, Postscheck-Konto Berlin 16 735

Neue Forschungsarbeiten!

Heft 330: Über die Einwirkung von Laugen und Salzen auf Flußeisen unter Hochdruckbedingungen und über die Schutzwirkung von Natriumsulfat gegen den Angriff von Ätznatron und von Chlormagnesium. Von Prof. Dr. E. Berl und Dr.-Ing. F. van Taack. DIN A 4, IV/32 Seiten mit 34 Abbildungen und 33 Zahlentafeln. Broschiert 5 RM (für VDI-Mitglieder 4,50 RM).

Heft 331: Zur Frage der Beanspruchung beim Dauerschlagversuch. Von Dr.-Ing. S. Berg. DIN A 4, IV/28 Seiten mit 33 Abbildungen und 15 Zahlentafeln. Broschiert 5 RM (für VDI-Mitglieder 4,50 RM).

Heft 333: Gewichtverlagung und Ausnutzung des Reibungsgewichtes bei elektrischen Lokomotiven mit Einzelachsantrieb. Von Dr.-Ing. H. G. Lindner. DIN A 4, IV/25 Seiten mit 32 Abbildungen, 2 Zahlentafeln und 2 Tabellen. Broschiert 5 RM (für VDI-Mitglieder 4,50 RM).

Heft 334: Untersuchungen an der Dieselmaschine: Der Spül- und Ladevorgang bei Zweitaktmaschinen / Das Arbeitverfahren raschlaufender Zweitakt-Vergasermaschinen. Von Prof. Dr.-Ing. K. Neumann und Dr.-Ing. O. Klüsener. DIN A 4, IV/46 Seiten mit 72 Abbildungen und 12 Zahlentafeln. Broschiert 8,50 RM (für VDI-Mitglieder 7,65 RM).

Heft 335: Die Werkstoffdämpfung bei Dreh- und Biegeschwingungsbeanspruchung. Von O. Föppl und G. Schaaf. DIN A 4, IV/27 Seiten mit 54 Abbildungen. Broschiert 5 RM (für VDI-Mitglieder 4,50 RM).

Heft 339: Die Zustandsgrößen des Sauerstoffs bei tiefen Temperaturen (mit Diagrammen). Von Dr.-Ing. F. Schmidt. DIN A 4, IV/20 Seiten mit 7 Abbildungen und 4 Tafeln. Broschiert 4 RM (VDI-Mitglieder 3,60 RM).

Durch jede Buchhandlung zu beziehen!

VDI-Verlag G. m. b. H. ❖ Berlin NW 7

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 10 | **Oktober 1930** | **Heft 5**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. W. Cauer: Die Siebschaltungen der Fernmeldetechnik	425
F. Weinig: Ueber die graphische Berechnung der Strömungsverhältnisse und der Leistungsaufnahme in einem gegebenen Turbinenrad	434
G. Weinblum: Ueber die Berechnung des wellenbildenden Widerstandes von Schiffen, insbesondere die Hognersche Formel	453
M. Herzberger: Ueber die Umgebung eines Strahls in optischen Systemen	467
H. Buchholz: Die magnetische Leitfähigkeit eines unregelmäßig gestalteten Luftzwischenraumes bei parallelebenem Feld	486
E. Lukács: Anwendung der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie auf Nomographie	501
R. Mehmke: Ueber die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen durch Elimination aufzulösen	508
Kurze Auszüge. Elastizität und Festigkeit	515
Kleine Mitteilungen. Nemény i: Zur graphischen Darstellung der Beziehungen an elastisch eingespannten Balken. — Werner: Kontrollformel für die Mittelwerte einer Folge von Funktionswerten	517
Buchbesprechungen. Wiarda: Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. — Thoma: Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. — Spannhake: Mitteilungen des Instituts für Strömungsmaschinen der Techn. Hochschule Karlsruhe. — Hermann und Burbach: Strömungswiderstand und Wärmeübergang in Rohren. — Plaut: Fabrikationskontrolle. — Föppl: Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München. — Auerbach und Hort: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. — Weitzenböck: Der vierdimensionale Raum. — Eckhart: Der vierdimensionale Raum. — Handbuch der Physik. — Luftfahrtforschung. — Bieberbach: Analytische Geometrie. — Weiter eingegangene Bücher	519
Nachrichten	523

HAUPTAUFSÄTZE

Die Siebschaltungen der Fernmeldetechnik.[1]

Von **W. CAUER** in Göttingen.

Die folgenden Ausführungen geben, ausgehend von der historischen Entwicklung der Siebschaltungen, eine kurze Erläuterung ihrer Wirkungsweise an Hand von Anwendungsbeispielen, eine Darlegung der den elektrotechnischen Begriffen zugrunde liegenden mathematischen Tatsachen und endlich eine neue allgemeine Theorie der Siebschaltungen. Wesentlich ist in dieser Theorie die gemeinsame Behandlung sämtlicher für alle Frequenzen äquivalenten Schaltungen sowie die Auffassung der für einen elektrischen Vierpol charakteristischen Größen als analytische Funktionen einer komplexen Variabeln λ ($\lambda = i\,\omega$, ω = Kreisfrequenz) und das genaue Studium der Eigenschaften, die solche bei Schaltungen auftretende Funktionen kennzeichnen. Dadurch wird eine vollständige Uebersicht über die mit sämtlichen überhaupt denkbaren Schaltungen erzielbaren Resultate ermöglicht. Diese Betrachtungsweise von Schaltungen ist ebenso wie für Siebschaltungen für die Lösung aller solcher Aufgaben der Fernmeldetechnik nützlich, bei denen es darauf ankommt, Schaltungen gewünschter Frequenzabhängigkeit herzustellen (z. B. Nachbildungs-, Dämpfungs- und Phasenausgleichschaltungen). Die in dieser Arbeit dargelegte Anwendung auf Siebschaltungen läßt deutlich die Vorteile erkennen, die durch Heranziehnng sämtlicher physikalisch möglicher Schaltungen gegenüber den bisher bekannten Siebschaltungen erzielt werden können. Insbesondere wird gezeigt, wie sich die Konstanz des Wellenwiderstandes in einem Durchlaßbereich mit jeder praktisch gewünschten Genauigkeit erreichen läßt. Wegen eines eingehenderen zahlenmäßigen Vergleichs der Güte bekannter Siebschaltungen und der hier vorgeschlagenen Schaltungen bei gleichem Aufwand an Schaltelementen und Erläuterung an Beispielen sei auf eine demnächst in der E. N. T. erscheinende Arbeit hingewiesen.

1. Definition einer Siebschaltung. Vom Radio her hat auch der Nichtelektrotechniker eine Vorstellung von den Begriffen Resonanz und Resonanzschaltung bei elektrischen Schwingungen oder elektrischem Wechselstrom. Legt man an eine Reihenanordnung einer Kapazität und einer Selbstinduktion (Abb. 1a) eine rein periodi-

[1]) Erweiterte Fassung des in Göttingen am 27. November 1928 gehaltenen Habilitationsvortrages, auch vorgetragen in der Gesellschaft für angewandte Math. u. Mech. am 22. Februar 1929.

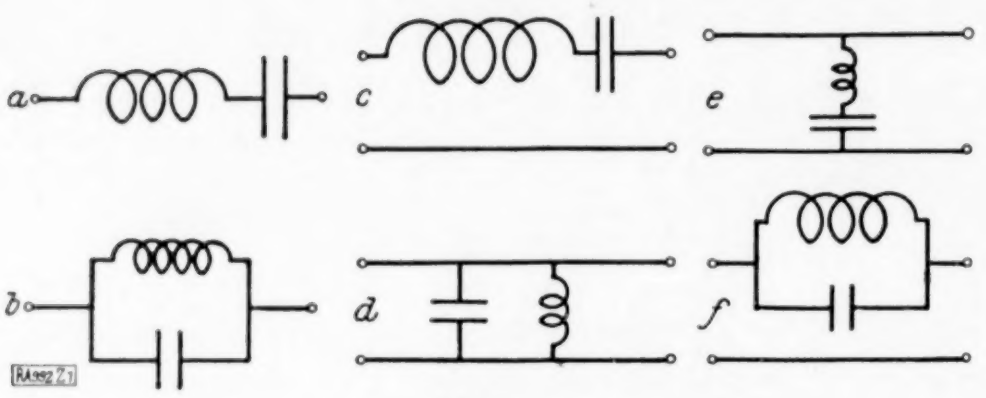


Abb. 1.

sche (sinusförmige) elektromotorische Kraft, so fließt im eingeschwungenen Zustand ein sinusförmiger Strom, der bei Veränderung der Frequenz, aber dabei konstant gehaltener Amplitude der Wechselstromspannung in der Nähe einer gewissen Frequenz, der Resonanzfrequenz, sehr stark anwächst. Macht man dasselbe mit einer Parallelschaltung einer Kapazität und Selbstinduktion (Abb. 1 b), so gibt es eine Frequenz, die »Antiresonanzfrequenz«, in deren Nähe der eingeschwungene sinusförmige Strom beliebig klein wird. Drückt man die physikalischen Spannungen und Ströme als reelle Teile von komplexen Spannungen und Strömen aus, welche die Zeit nur in einem Faktor $e^{i\omega t}$ enthalten, so läßt sich der geschilderte Sachverhalt auch so aussprechen: der zeitunabhängige Quotient E/J (komplexe Spannung dividiert durch komplexen Strom), der »Wechselstromwiderstand« der Schaltung, hängt von der Kreisfrequenz ω ab. Für eine Resonanzfrequenz wird er Null, die Schaltung wirkt hier wie ein Kurzschluß; für eine Antiresonanzfrequenz wird er unendlich groß. Legt man die erwähnten Zweipolschaltungen (Schaltungen mit zwei zugänglichen Klemmen) nach Abb. 1 c—f zwischen einen Sendeapparat S und einen Empfangsapparat E (vgl. auch Abb. 7), so wird vorzugsweise für eine Resonanz- oder Antiresonanzfrequenz entweder die Wechselstromenergie von S nach E besonders gut übertragen werden (Abb. 1 c und d) oder besonders schlecht (Abb. 1 e und f). Unter einer Siebschaltung versteht man nun eine Vierpolschaltung, die nicht nur eine bestimmte Frequenz oder eine endliche Anzahl bestimmter Frequenzen, sondern ganze vorgeschriebene Frequenzbereiche bevorzugt. Ein »Vierpol« ist eine Schaltung mit zwei Paaren von zugänglichen Klemmen; am besten stelle man sich einen Kasten mit zwei Klemmenpaaren vor, in dessen Innern sich in beliebiger Zusammenschaltung Selbstinduktionen, gegenseitige Induktionen, Ohmsche Widerstände und Kapazitäten, jedoch keine elektromotorischen Kräfte und Elektronenröhren befinden. Dabei soll der Uebergang von einem »Durchlaß«- zu einem »Sperrbereich« möglichst scharf sein. Es leuchtet ein, daß man bei Verwendung mehrerer Selbstinduktionen und Kapazitäten eine Reihe bevorzugter Frequenzen erhalten wird, und man kann es verstehen, daß man mit zunehmender Anzahl von Schaltelementen dahin gelangt, daß ganze Frequenzbereiche nahezu gleichmäßig bevorzugt oder unterdrückt werden, während unendlich viele Kapazitäten und Selbstinduktionen erforderlich sind, um exakt ein kontinuierliches Resonanzspektrum zu erzielen.

K. W. Wagner hat als erster gezeigt, wie man eine Aussiebung vorgeschriebener Frequenzbereiche dadurch erreichen kann, daß man von einer verhältnismäßig einfachen Resonanz-Vierpolschaltung ausgeht und diese wiederholt mit sich selbst in Reihe legt (sogenannter Kettenleiter). Läßt man die Gliedzahl der Kette unbegrenzt wachsen, so werden gewisse vorschreibbare Frequenzbereiche überhaupt nicht mehr vom Sende- zum Empfangsapparat durchgelassen.

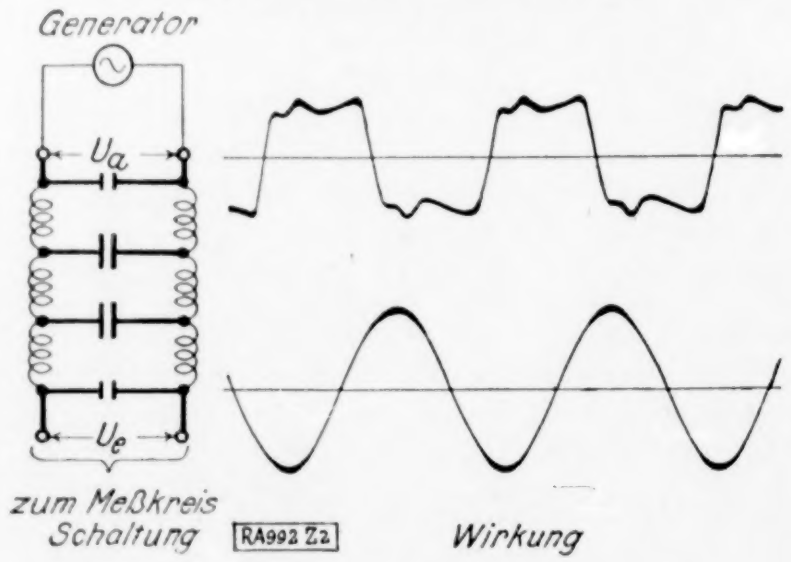


Abb. 2.

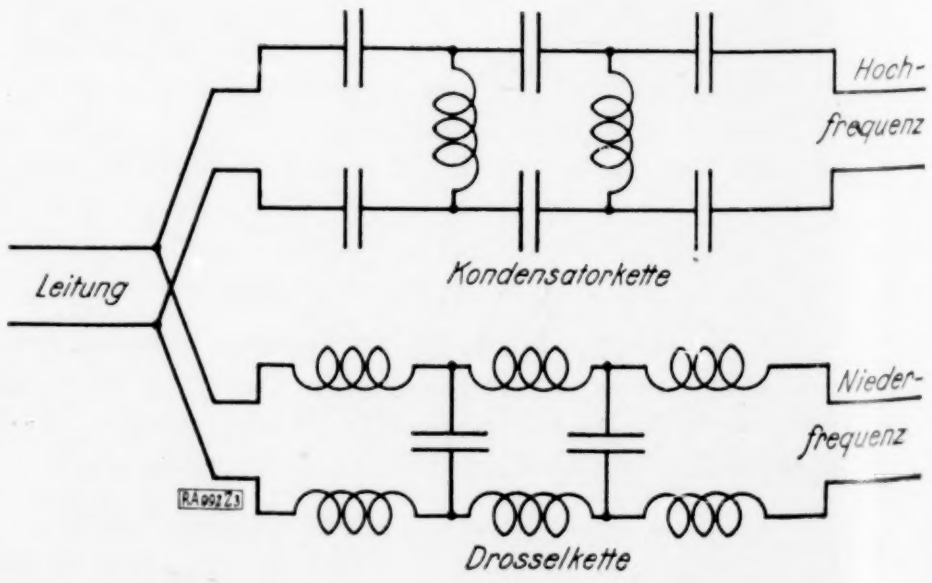


Abb. 3.

2. Anwendungsbeispiele von Siebschaltungen. An einigen Anwendungsbeispielen soll nun die Wirkungsweise von Siebschaltungen verdeutlicht werden.

Abb. 2 [1]) zeigt die Unterdrückung der Oberschwingungen einer Stromquelle mit verzerrter Spannungskurve durch eine Spulenkette, die im wesentlichen alle Frequenzen unterhalb einer bestimmten Frequenz, der »Grenzfrequenz«, durchläßt, oberhalb dieser Frequenz aber unterdrückt. Abb. 3 zeigt die Möglichkeit einer »elektrischen Weiche«, d. h. die Trennung von Hochfrequenz und Niederfrequenz. Die Weiche ist eine Zusammenschaltung einer »Spulenkette« und einer reziprok wirkenden »Kondensatorkette«. Abb. 4 [1]) bringt die Wirkung einer »Siebkette« zum Ausdruck, die nur Frequenzen in einem sehr engen Frequenzbereich hindurchläßt. Das Prinzip der »elektrischen Weiche« findet seine Anwendung bei der Mehrfachtelegraphie über eine und dieselbe Leitung (Abb. 5). Im Takte der Morsezeichen werden nicht Gleichstromimpulse, sondern ton-

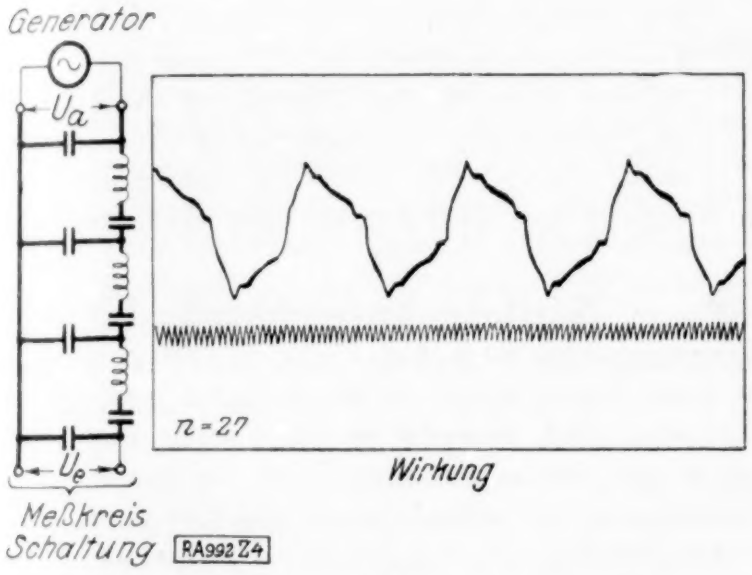


Abb. 4.

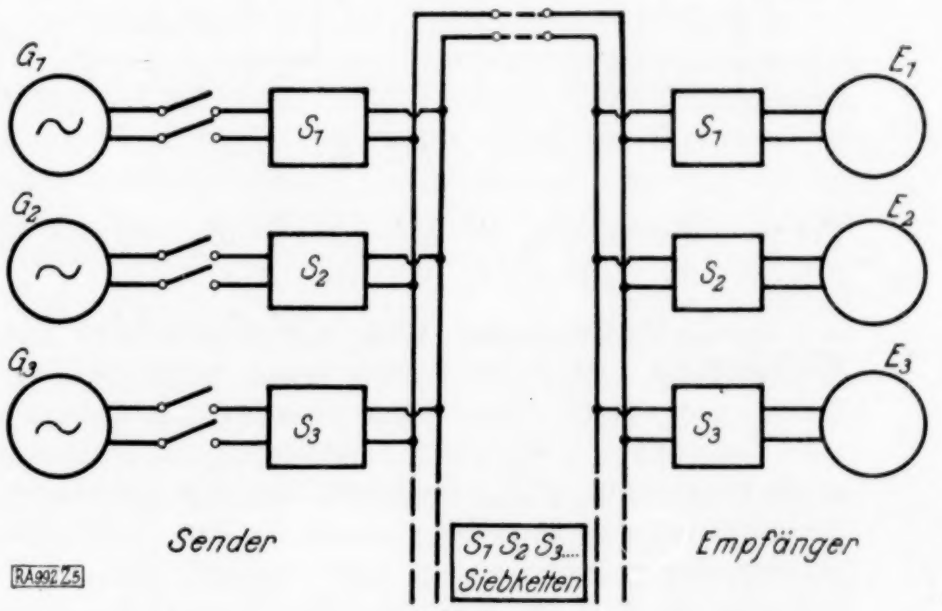


Abb. 5.

frequente Wechselströme über die Leitung geschickt. Dabei ist für jedes der gleichzeitig zu sendenden Telegramme ein besonderer Frequenzbereich vorgesehen. Die von den Sendern ausgehenden Wechselströme werden zunächst auf der Sendeseite durch Siebschaltungen gereinigt, so daß die Frequenzen für die verschiedenen Telegramme sich nicht gegenseitig überlappen, gehen dann gemeinsam über dieselbe Fernleitung und werden am Empfangsort wieder durch Siebschaltungen voneinander getrennt. Die Benutzung von Siebschaltungen erweist sich u. a. auch für akustische Untersuchungen als sehr fruchtbar. Diese wenigen Beispiele für die praktische Anwendung von Siebschaltungen mögen hier genügen. Das tatsächliche praktische Bedürfnis an Siebschaltungen ist so stark, daß eine große amerikanische Telephongesellschaft z. B. eine ganze Reihe von Leuten ständig an dem Ausbau der Theorie und dem praktischen Entwurf von Siebschaltungen arbeiten läßt.

3. Erklärung der Wirkungsweise der K. W. Wagnerschen Siebketten. Die in den Abb. 2 bis 5 gezeigten Schaltungen sind alle Ketten nach der von K. W. Wagner angegebenen Art. Die einzelnen Glieder einer Kette sind selbst symmetrische Vierpole (ein Vierpol heißt symmetrisch, wenn sein Einfluß nach außen hin bei Vertauschung von Eingangsklemmenpaar mit Ausgangsklemmenpaar ungeändert bleibt). Suchen wir uns nun die Wirkungsweise solcher Siebketten zu erklären.

Man denke sich dazu einen unendlich langen »Kettenleiter« mit symmetrischen Vierpolen als Gliedern (Abb. 6). An einer Stelle der Kette möge eine rein periodische (sinusförmige) elektromotorische Kraft wirken. Im eingeschwungenen Zustand wird dann z. B. rechts von dieser Stelle zwischen den Strömen J_ν und $J_\nu + 1$ am Eingang und Ausgang des ν-ten Kettengliedes eine wohlbestimmte Beziehung bestehen. Der zeitunabhängige Quotient $\frac{J_\nu}{J_\nu + 1}$ der komplexen Ströme, dessen Betrag ihr Amplitudenverhältnis und dessen Arcus ihre Phasenverschiebung angibt, hängt nämlich nur von den Eigenschaften des einzelnen Vierpolgliedes und nicht von Amplitude und Phase, wohl aber von der Frequenz der elektromotorischen Kraft ab. Der Elektrotechniker schreibt für

[1]) Die Abb. 2 und 4 sind einer Arbeit von K. W. Wagner »Kettenleiter und Wellensiebe«, E. N. T. Bd. 5 (1928), S. 1 entnommen.

diesen Quotienten e^{Γ} und nennt Γ das Fortpflanzungsmaß. Der reelle Teil von Γ ist nie negativ und liefert ein Maß für die »Dämpfung« des einzelnen Vierpols. Γ hängt, das ist wesentlich, von der Frequenz des Wechselstroms ab, immer aber ist die Dämpfung positiv, wenn die Schaltung Ohmsche Widerstände enthält, da in diesen elektrische Energie verzehrt wird. Im Idealfall von verschwindenden Ohmschen Widerständen gibt es dagegen gewisse endliche oder unendliche Frequenzbereiche mit verschwindender Dämpfung, die sich, wie man zeigen kann, für einen Vierpol beliebig vorschreiben lassen. Schaltet man einen solchen Vierpol wiederholt mit sich selbst in Reihe zu einer Kette, so kommt eine Siebwirkung zustande. Denn wegen $\frac{J_\nu}{J_{\nu+2}} = \frac{J_\nu}{J_{\nu+1}} \cdot \frac{J_{\nu+1}}{J_{\nu+2}}$ (vgl. Abb. 6) addieren sich bei Reihenschaltung gleicher symmetrischer Vierpole die Fortpflanzungsmaße und damit die Dämpfungsmaße. In denjenigen Frequenzbereichen, wo für den einzelnen Vierpol die Dämpfung Null ist, bleibt sie für die ganze Kette Null, während in den übrigen Frequenzbereichen die Dämpfung des resultierenden Vierpols mit der Anzahl der Kettenglieder ins Unendliche wächst.

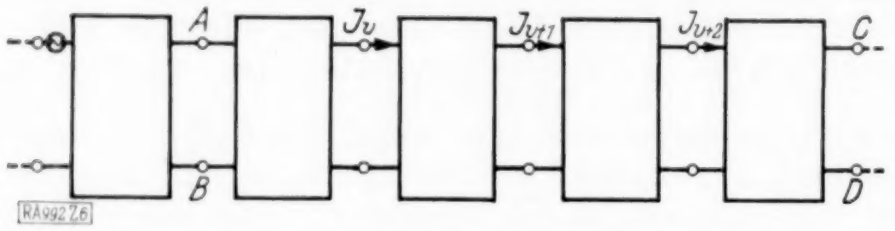


Abb. 6.

4. Bedeutung des „Wellenwiderstandes". — Weitere Entwicklung der Siebketten. Man darf sich aber nicht darüber täuschen, daß man bei einer derartigen Kette von noch so vielen Gliedern trotzdem von dem Ideal einer Siebschaltung noch weit entfernt sein kann. Machen wir uns noch einmal klar, worauf es ankommt, was man erreichen will. Gegeben ist ein Sendeapparat S mit einem inneren Wechselstromwiderstand, der im allgemeinen in den Durchlaßbereichen der Siebschaltungen als konstant zu betrachten ist, d. h. nur unwesentlich von der Frequenz abhängt, und weiter ein Empfangsapparat E, für den das gleiche gilt. Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, daß die konstanten Widerstände R beider Apparate praktisch einander gleich sind. Zwischen beide Apparate soll eine Siebschaltung (ein Vierpol) gelegt werden (Abb. 7), die in den Durchlaßbereichen praktisch so wirkt, als ob S und E unmittelbar verbunden wären, in den Sperrbereichen dagegen so, als ob beide Apparate gänzlich voneinander getrennt wären. Die vorhin gemachte Ueberlegung von der unendlich langen Kette paßt nur dann auf diesen Fall der Praxis, wenn der sogenannte »Wellenwiderstand« der Kette denselben konstanten Wert hat wie der Widerstand von S und E. Der Wellenwiderstand ist der Wechselstromwiderstand der unendlich langen Kette; er läßt sich in Abb. 6 u. a. an den Klemmen A, B oder C, D durch Messung des Quotienten E/J bestimmen, wenn dort die Kette aufgeschnitten wird (durch Aufschneiden bei A, B und C, D in Abb. 6 entsteht eine viergliedrige Siebkette). Im allgemeinen variiert nun aber gerade bei den Wagnerschen Ketten der Wellenwiderstand in den Durchlaßbereichen sehr stark mit der Frequenz. Zwar besteht trotzdem die Eigenschaft einer sehr großen Dämpfung in den Sperrbereichen bei hinreichend großer Gliedzahl der Kette. Dagegen werden in den »Durchlaßbereichen« Wechselströme verschiedener Frequenz durchaus nicht gleichmäßig durchgelassen. Der scharfe Uebergang von Durchlaßbereich zu Sperrbereich wird dadurch in unerwünschter Weise abgerundet. Der Elektrotechniker drückt das so aus: An den Anschlußstellen A, C und C, D der Siebkette für S und E entstehen infolge »schlechter Anpassung« Reflexionsverluste. Besonders unangenehm macht sich die schlechte Anpassung bei Anschluß von längeren Leitungen an die Siebschaltung auch dadurch bemerkbar, daß die Reflexionen der elektrischen Wellen an den Verbindungsstellen unerwünschte Echoerscheinungen zur Folge haben. Man muß also bestrebt sein, den Wellenwiderstand einer Siebschaltung dem konstanten Widerstand R der anzuschließenden Schaltungen oder Apparate in den Durchlaßbereichen möglichst anzupassen.

Abb. 7.

Zobel und andere Amerikaner haben in sinnreicher Weise die Ueberlegungen von K. W. Wagner und G. A. Campbell[1]) auf Ketten mit unsymmetrischen von-

[1]) G. A. Campbell hat unabhängig von K. W. Wagner, etwas später als dieser, die Bedeutung der Siebketten erkannt.

einander verschiedenen Gliedern verallgemeinert, die in bestimmter Weise einander angepaßt werden. Durch tabellarische Zusammenstellung der Eigenschaften einer Reihe einfacher Vierpole und Zusammensetzung mehrerer solcher Vierpole an einer Kette konnten sie eine größere Anzahl von Siebschaltungen übersichtlich rechnerisch beherrschen. Insbesondere gelang es Zobel, schon eine verhältnismäßig brauchbare Konstanz des Wellenwiderstandes im Durchlaßbereich zu erzielen. Soweit die Hauptergebnisse über Siebketten, die von elektrotechnischer Seite gewonnen wurden.

5. Mathematische Grundlagen. Bevor nun auseinandergesetzt wird, inwiefern damit die Siebschaltungsfrage nur unvollkommen gelöst ist und wie man vorzugehen hat, um bessere und billigere Siebschaltungen zu bauen, soll kurz der mathematische Hintergrund der bisherigen Ueberlegungen skizziert werden.

Die Elektrizitätsmengen, die durch die einzelnen Stromzweige einer Schaltung fließen, genügen einem System von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese Koeffizienten sind die in der Schaltung vorkommenden Selbstinduktionen, gegenseitigen Induktionen, Ohmschen Widerstände und Kapazitäten. Zwischen den Elektrizitätsmengen oder ihren Ableitungen nach der Zeit, den Strömen der verschiedenen Zweige der Schaltung bestehen gewisse lineare Gleichungen, nämlich die bekannten Kirchhoffschen Gleichungen für die Stromverzweigung: Die algebraische Summe aller auf einen Knotenpunkt zufließenden Ströme muß Null sein. Man hat eine vollkommene Analogie in den Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen der Mechanik, wenn es sich um ein mechanisches System handelt, dessen Koordinaten nicht unabhängig voneinander sind, sondern Nebenbedingungen genügen, die den Kirchhoffschen Gleichungen analog sind. Die kinetische Energie, Dissipationsfunktion und potentielle Energie im mechanischen Fall entsprechen bzw. der elektromagnetischen Energie der Spulen, der in den Ohmschen Widerständen verzehrten Jouleschen Wärme und der in den Kapazitäten aufgespeicherten elektrostatischen Energie. Der mathematische Ausdruck für jede Energieart ist eine positiv definite quadratische Form. Uns interessiert der Fall rein sinusförmiger, stationär periodischer erzwungener Schwingungen und hier wieder speziell der Fall des Vierpols (Abb. 7), wo nur an zwei Stellen eingeprägte elektromotorische Kräfte vorhanden sind $-E_1$ am Anfang und $-E_2$ am Ende des Vierpols, beide proportional $e^{i\omega t}$. In dem Fall rein periodischer erzwungener Schwingungen reduziert sich jenes Differentialgleichungssystem in bekannter Weise auf ein System gewöhnlicher linearer Gleichungen mit Koeffizienten, die noch von der Kreisfrequenz des Wechselstroms ω in einfacher rationaler Weise abhängen. Durch Elimination aller im Innern des Vierpols auftretenden Ströme aus diesem Gleichungssystem ergeben sich zwei lineare homogene Gleichungen zwischen den komplexen Spannungen und Strömen am Eingang und Ausgang des Vierpols:

$$E_1 = A(\lambda)\, E_2 + B(\lambda)\, J_2, \qquad J_1 = C(\lambda)\, E_2 + D(\lambda)\, J_2.$$

A, B, C, D hängen von der Zeit nicht ab und sind rationale Funktionen der Kreisfrequenz ω (statt der Variablen ω führt man zweckmäßig $\lambda = i\omega$ als Parameter ein, da dann alle in den rationalen Funktionen auftretenden Koeffizienten reell werden). Zwischen ihnen besteht infolge der Symmetrie jenes Differentialgleichungssystems die Beziehung

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1.$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ist der mathematische Ausdruck für die charakteristischen Eigenschaften eines Vierpols. Zu ein und derselben Matrix können noch sehr viel verschiedene physikalisch mögliche Vierpole gehören. Vierpole mit gleicher Matrix wollen wir äquivalent nennen. Einen gleichwertigen Ausdruck für die Vierpoleigenschaften liefert die linear gebrochene Transformation

$$\frac{E_1}{J_1} = w = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad z = \frac{E_2}{J_2}.$$

Physikalisch bedeutet hierin w den am Eingang des Vierpols gemessenen Wechselstromwiderstand, wenn an die Ausgangsklemmen der Wechselstromwiderstand z angeschlossen wird.

Ein symmetrischer Vierpol (z. B. die Wagnerschen Siebketten, sowie ihre einzelnen Glieder) ist durch die Beschränkung $A = D$ gekennzeichnet. Der Wellenwiderstand $z = \sqrt{\frac{B}{C}}$ ist der eine der beiden Fixpunkte der Transformation $w(z)$,

nämlich derjenige, für den $\Re z \geqq 0$ für $\Re \lambda \geqq 0$ ($\Re$ = Realteil). Der Wellenwiderstand hängt natürlich wie A, B, C, D von der Kreisfrequenz, d. h. von λ ab. Das Fortpflanzungsmaß Γ ist gegeben durch

$$e^{\Gamma} = A + \sqrt{A^2 - 1}.$$

e^{Γ} ist diejenige Wurzel der mit der Vierpolmatrix gebildeten charakteristischen Gleichung (Säkulargleichung), deren Betrag $\geqq 1$ ist für $\Re \lambda \geqq 0$. (Daß tatsächlich die eine Wurzel immer einen derartigen Betrag hat, folgt mathematisch aus der Erzeugung von A aus den Koeffizienten jenes Differentialgleichungssystems.)

Die Matrix eines Vierpols, der aus einer Reihe von hintereinander geschalteten Vierpolen zusammengesetzt ist, ist das Produkt der Matrizen der einzelnen Vierpole. Dabei multiplizieren sich auch die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen der einzelnen Matrizen. Die multiplikative Eigenschaft von e^{Γ} gab aber gerade die Erklärung der Wirkungsweise der Wagnerschen Siebketten. Die für einen symmetrischen Vierpol charakteristische lineargebrochene Transformation ist im allgemeinen loxodromisch. Nur für rein imaginäres λ, das praktisch vorwiegend interessiert, und im Grenzfall verschwindender Ohmscher Widerstände (Siebschaltungen) ist die Transformation entweder elliptisch (Durchlaßbereich) oder hyperbolisch (Sperrbereich).

6. Die Frequenzcharakteristiken eines symmetrischen Vierpols. — Äquivalenzsatz für symmetrische Vierpole. Dies alles ist nur eine mathematische Uebersetzung von Dingen, die dem Fernmeldetechniker bekannt sind. Doch darf man damit zufrieden sein? Es wurde schon darauf hingewiesen, daß die Konstanz des Wellenwiderstandes in den Durchlaßbereichen bei den bisher verwendeten Siebschaltungen praktisch noch zu wünschen übrig läßt. Andererseits genügt es nicht, überhaupt Schaltungen anzugeben, welche sieben, sondern es kommt auf möglichst billige Schaltungen an. Dazu muß man alle denkbaren Schaltungen in Betracht ziehen, nicht nur die einfachen Kettenschaltungen, und zwar empfiehlt es sich, alle untereinander äquivalenten Schaltungen gemeinsam zu untersuchen Zunächst entsteht die Aufgabe, festzustellen: welcher Art sind die Funktionen $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, oder wie kann man A, B, C, D für einen gegebenen Frequenzbereich, d. h. für rein imaginäre λ vorschreiben, damit sie sich durch rationale Funktionen von λ annähern lassen, die irgendeine physikalische Realisierung durch Vierpolschaltungen erlauben.

Eine sehr einfache Antwort hierauf gibt es für den Fall symmetrischer Vierpole, der bei Siebschaltungen vor allem interessiert. Während im allgemeinen wegen der Nebenbedingung $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1$ drei Funktionen von λ einen Vierpol charakterisieren, sind es im Symmetriefall $A = D$ nur zwei Funktionen. Die Beschränkungen für A, B, C lassen sich nun besonders einfach aussprechen, wenn man zwei geeignete von λ abhängige Parameter z_1 und z_2 wählt, die A, B, C bestimmen. z_1 und z_2 sollen definiert werden durch

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{e^{\Gamma}+1}{e^{\Gamma}-1}\right)^2 = \frac{A+1}{A-1}, \qquad z_1 z_2 = Z^2 = \frac{B}{C}, \qquad (\Re z_1 \geqq 0, \quad \Re z_2 \geqq 0 \text{ für } \Re \lambda \geqq 0).$$

Während für Fortpflanzungsmaß Γ und Wellenwiderstand Z, die von den Elektrotechnikern mit Vorliebe benutzten Vierpolparameter, die Bedingungen der physikalischen Realisierbarkeit sich nicht so einfach aussprechen lassen, lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für z_1 und z_2 einfach dahin, daß sie physikalisch realisierbare Wechselstromwiderstände sind, d. h. durch Zweipole mit den Wechselstromwiderständen z_1 bzw. z_2 realisiert werden können. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß z_1 und z_2 analytische Funktionen von λ sind, die sich in der rechten Halbebene regulär verhalten, dort positiv reellen Teil besitzen und auf der reellen Achse reell sind. Solche Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie die Poissonsche Integraldarstellung

$$z = \lambda\left[C + \int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{\lambda^2 + x}\right]$$

besitzen, worin $C \geqq 0$, ψ eine wachsende Funktion und das Integral im Stieltjesschen Sinne zu nehmen ist. Dieser Formulierung, daß z_1 und z_2 realisierbare Wechselstromwiderstände sein müssen, entspricht die physikalische Realisierung einer Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$ durch die Wheatstonesche Brückenanordnung aus Zweipolen Abb. 8, in der das eine Paar gegen-

überliegender Zweipole den Wechselstromwiderstand z_1, das andere Paar den Wechselstromwiderstand z_2 besitzt. Mit anderen Worten: es gilt ausnahmslos für symmetrische Vierpole der grundlegende Satz:

Jeder symmetrische Vierpol ist äquivalent mit einem Vierpol von Wheatstonescher Brückenanordnung (Abb. 8) aus Zweipolen mit den Wechselstromwiderständen z_1 und z_2 [1]).

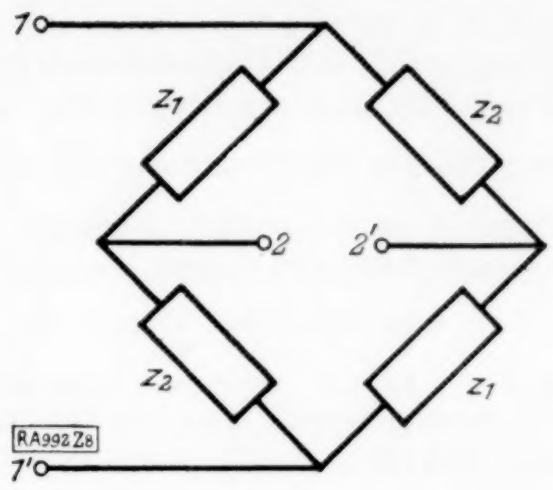


Abb. 8.

Daraus folgt, daß man bis auf Aequivalenz alle symmetrischen Vierpole erhält, indem man alle physikalisch möglichen z_1 und z_2 wählt.

7. Anwendung der Theorie symmetrischer Vierpole auf Siebschaltungen. – Unsymmetrische Siebschaltungen. Siebschaltungen insbesondere wird man demnach zweckmäßig so entwerfen, daß man zunächst die Funktionen z_1 und z_2 geeignet wählt. Dabei zeigt sich, daß durch Heranziehung der Vierpolparameter z_1 und z_2 eine besonders einfache Formulierung und Erfüllung der Forderungen möglich wird, die an eine Siebschaltung gestellt werden.

Bei den Siebschaltungen spielen die praktisch unvermeidbaren Ohmschen Widerstände eine sekundäre Rolle. Wir werden daher weiterhin nur endliche Schaltungen ohne Ohmsche Widerstände zu betrachten haben. Bei diesen reduziert sich jene für alle Wechselstromwiderstände z gültige Stieltjessche Integraldarstellung auf eine Summe von Partialbrüchen der Form

$$\frac{a\,\lambda}{\lambda^2 + b} \quad (a > 0,\ b \geqq 0),$$

entsprechend Parallelschaltungen einer Kapazität und einer Selbstinduktion wie in Abb. 1 b. Einen gleichwertigen Ausdruck für die charakteristische Frequenzabhängigkeit der Zweipolschaltungen ohne Ohmsche Widerstände liefert die Darstellung

$$z = \frac{H\,(\lambda^2 + \omega_1^2)\,(\lambda^2 + \omega_3^2)\,\ldots\,(\lambda^2 + \omega_{2n-1}^2)}{\lambda\,(\lambda^2 + \omega_2^2)\,\ldots\,(\lambda^2 + \omega_{2n-2}^2)}$$

$$H > 0, \quad 0 \leqq \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1} \leqq \infty .$$

Es folgen also Resonanz- und Antiresonanzfrequenzen immer abwechselnd aufeinander.

Abb. 9 gibt Beispiele von Zweipolen, wie sie stets als z_1 und z_2 in der Brückenanordnung (Abb. 8) für Siebschaltungen benutzt werden können. Jeder Wechselstromwiderstand z der soeben angeschriebenen mathematischen Form gestattet nämlich eine Realisierung durch die Zweipole von Abb. 9 [2]) oder auch: Jeder Zweipol ohne Ohmsche Widerstände ist »äquivalent« zu einem der »kanonischen« Zweipole (Abb. 9).

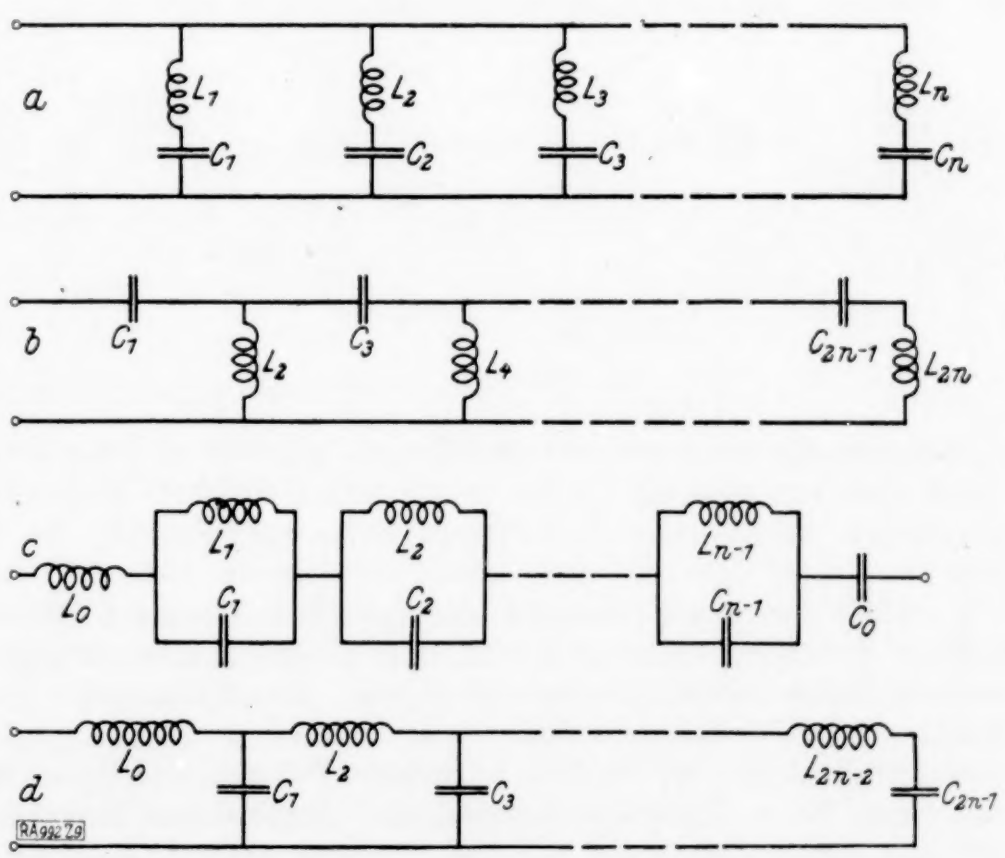


Abb. 9.

Man überzeugt sich auf Grund der angeführten Formeln leicht, daß Durchlaßbereiche (Dämpfung 0) durch $z_1 z_2 > 0$, Sperr-

[1]) Berl. Sitz.-Ber. Dez. 1927 »Ueber die Variablen eines passiven Vierpols«.

[2]) Vergl. hierzu Archiv f. Elektrotechnik, Des. 1926 »Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit«.

bereiche durch $z_1 z_2 < 0$ gekennzeichnet werden. Daraus folgt, daß der Quotient $\frac{z_1}{z_2}$ nur Nullstellen und Pole in den Durchlaßbereichen, das Produkt $z_1 z_2$ nur Nullstellen und Pole in den Sperrbereichen besitzen kann. Das Fortpflanzungsmaß Γ hängt nur vom Quotienten, der Wellenwiderstand Z nur vom Produkt ab. Daher kann bei gegebenen Durchlaß- und Sperrbereichen eine günstige Bestimmung der beiden Größen Γ und Z unabhängig voneinander geschehen, indem Nullstellen und Pole für $\frac{z_1}{z_2}$ und $z_1 \cdot z_2$ geeignet gewählt werden. Beim Entwurf einer Siebschaltung wird man daher nicht sofort die rationalen Funktionen z_1 und z_2, sondern zunächst ihr Produkt und ihren Quotienten bestimmen.

Das Ideal ist $\frac{z_1}{z_2} = 1$ in den Sperrbereichen (gleichbedeutend mit Dämpfung ∞) und $z_1 \cdot z_2 = R^2 =$ konst. in den Durchlaßbereichen.

Handelt es sich im Besonderen um den wichtigen Fall einer Vierpolschaltung, die nur zwischen den gegebenen Frequenzen ω_1 und ω_2 durchlässig sein soll, so erhält man geeignete Funktionen $\frac{z_1}{z_2}$, indem man in der linken Seite einer der Identitäten

$$\frac{\lambda^2 + \omega_1^2}{\lambda^2 + \omega_2^2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \sqrt{\frac{\omega_2^2 - x}{x - \omega_1^2}}\,\frac{dx}{\lambda^2 + x} + 1\right]^2 = 1\,,$$

$$(\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \frac{1}{\sqrt{(x - \omega_1^2)(\omega_2^2 - x)}}\cdot\frac{dx}{\lambda^2 + x}\right]^2 = 1$$

das Integral durch eine Summe annähert. Mit wachsender Zahl der Glieder der Annäherungssumme — entsprechend wachsender Zahl der Schaltelemente — wächst der Grad der Annäherung an das Ideal $\frac{z_1}{z_2} = 1$ in den Sperrbereichen. Wesentlich ist, daß man dabei gerade solche rationale Funktionen von λ erhält (man vergleiche die obige charakteristische Form der Funktionen $z(\lambda)$), wie sie physikalisch möglichen Schaltungen entsprechen.

Eine spezielle derartige Folge von rationalen Funktionen z_1/z_2 kann dadurch gewonnen werden, daß der Reihe nach die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 + \omega_2^2}{\lambda^2 + \omega_1^2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2(\lambda^2 + \omega_1^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{2(\lambda^2 + \omega_1^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

mit $\sqrt{\frac{\lambda^2 + \omega_1^2}{\lambda^2 + \omega_2^2}}$ multipliziert werden. Man erhält so für $\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ nacheinander die Ausdrücke

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_2^2}}\,,\qquad \frac{\lambda^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}\,\sqrt{\lambda^2 + \omega_2^2}}\,,\qquad \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}\left(\lambda^2 + \frac{\omega_1^2 + 3\,\omega_2^2}{4}\right)}{\left(\lambda^2 + \frac{3\,\omega_1^2 + \omega_2^2}{4}\right)\sqrt{\lambda^2 + \omega_2^2}}\,,$$

$$\frac{\left(\lambda^2 + \frac{(2+\sqrt{2})\,\omega_1^2 + (2-\sqrt{2})\,\omega_2^2}{4}\right)\left(\lambda^2 + \frac{(2-\sqrt{2})\,\omega_1^2 + (2+\sqrt{2})\,\omega_2^2}{4}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}\left(\lambda^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right)\sqrt{\lambda^2 + \omega_2^2}}$$

. . . . . .

Die Kettenschaltungen mit variabler Gliedzahl liefern nach Ersetzung durch äquivalente Brückenschaltungen natürlich auch Funktionenfolgen z_1/z_2, welche die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der physikalischen Realisierbarkeit erfüllen und mit wachsender Gliedzahl in den Sperrbereichen überall gegen 1 streben (ungleichmäßig an den Siebgrenzen ω_1 und ω_2). Solche Funktionenfolgen sind Spezialfälle der durch Annäherung jener Integrale erhaltenen. Besitzt das einzelne Glied den Quotienten

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_2^2}}\,,$$

so entspricht die von ihm erzeugte Kette gerade der durch die eben erwähnte Kettenbruchentwicklung gewonnenen Funktionsfolge.

In ähnlicher Weise erhält man $z_1 \cdot z_2$, indem man in dem durch die Siebgrenzen ω_1 und ω_2 bestimmten Ausdruck

$$\sqrt{z_1 z_2} = \frac{K(\lambda^2+\omega_{-m}^2)(\lambda^2+\omega_{-m+2}^2)\ldots(\lambda^2+\omega_0^2)\cdot(\lambda^2+\omega_3^2)\ldots(\lambda^2+\omega_{n-2}^2)(\lambda^2+\omega_n^2)}{\lambda(\lambda^2+\omega_{-m+1}^2)\ldots(\lambda^2+\omega_{-1}^2)\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}\sqrt{\lambda^2+\omega_2^2}(\lambda^2+\omega_4^2)\ldots(\lambda^2+\omega_{n-1}^2)}$$

$$(K>0,\ 0 \leqq \omega_{-m} < \omega_{-m+1} < \omega_{-m+2} < \ldots < \omega_{-1} < \omega_0 \leqq \omega_1 < \omega_2 \leqq \omega_3 < \omega_4 < \ldots < \omega_{n-2} < \omega_{n-1} < \omega_n \leqq \infty)$$

die Nullstellen und Pole geeignet bestimmt.

Zobels »M-Type«, deren Wellenwiderstand im Durchlaßbereich einigermaßen konstant ist, führt in unserer Ausdrucksweise auf eine Funktion der einfachen Gestalt

$$\sqrt{z_1 z_2} = \frac{K}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda^2+\omega_0^2)\cdot(\lambda^2+\omega_3^2)}{\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}\sqrt{\lambda^2+\omega_2^2}}.$$

Vergrößert man die Zahl der hier auftretenden Faktoren nur wenig, so läßt sich, wie die graphische Darstellung zeigt, die ideale Forderung $z_1 \cdot z_2 =$ konst. im Durchlaßbereich recht gut angenähert befriedigen.

Jede zulässige Wahl für z_1/z_2 kann mit einer zulässigen Wahl für $z_1 \cdot z_2$ kombiniert werden. So erhält man eine Reihe von Siebschaltungsklassen. Jede Klasse wird durch sehr viele untereinander äquivalente Vierpole realisiert.

Bisher wurden nur symmetrische Siebschaltungen besprochen. Unsymmetrische Siebschaltungen besitzen aus zwei Gründen praktisches Interesse. 1. können die beiderseits anzuschließenden Apparate wesentlich verschiedene Wechselstromwiderstände besitzen. Dann wird es genügen, in Reihe mit einer symmetrischen Siebschaltung einen Transformator zu legen oder einen zu einer solchen Reihenanordnung äquivalenten Vierpol zu wählen. 2. ist für Einschwingvorgänge die bisher unberücksichtigt gebliebene imaginäre Komponente von Γ, die Phasen-»Konstante«, von Einfluß (wichtig z. B. für die Mehrfachtelegraphie). Da der Quotient z_1/z_2, von dem Γ abhängt, bei einem symmetrischen Vierpol aber bereits durch die Forderung großer Dämpfung in den Sperrbereichen in der Hauptsache schon festgelegt ist, kann es zweckmäßig sein, in Reihe mit einer nach den vorher gegebenen Richtlinien entworfenen symmetrischen Siebschaltung eine Phasenausgleichschaltung konstanten Wellenwiderstandes R zu legen oder einen zu einer solchen Reihenanordnung äquivalenten Vierpol zu wählen. Eine Phasenausgleichschaltung ist ein symmetrischer Vierpol, für den z_1 und z_2 keine Ohmschen Widerstände enthalten und für den $z_1 \cdot z_2 = R^2 =$ konst. Ein solcher Vierpol besitzt keine Dämpfung. Der resultierende Vierpol verhält sich nur in den Durchlaßbereichen symmetrisch, ist aber als Ganzes unsymmetrisch.

Hat man erst die rationalen Funktionen z_1 und z_2, so ist stets, wie bereits ausgeführt, z. B. eine Brückenanordnung nach Abb. 8 mit Zweipolen nach Abb. 9 eine physikalische Realisierung. Doch wäre die Wahl einer derartigen Schaltung unvorteilhaft, da man so überflüssig viele Schaltelemente erhält. Deshalb ist es wichtig zu wissen, wie die äquivalenten Schaltungen untereinander zusammenhängen, wie man aus einer Schaltung alle anderen äquivalenten erhalten kann. Dafür ist grundlegend eine spezielle lineare Transformationsgruppe, die man als Gruppe der Vierpole bezeichnen kann und die auf jene quadratischen Formen ausgeübt wird, welche zu der Schaltung gehören. Die wichtige Frage der Aequivalenz wurde an anderer Stelle ausführlicher behandelt[1]).

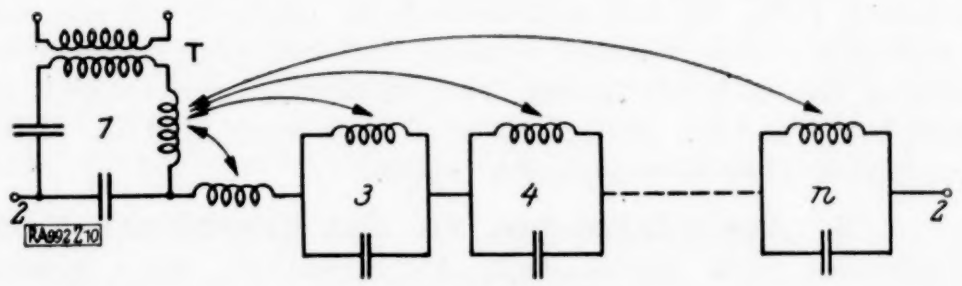


Abb. 10.

Hier sei nur noch die Schaltung (Abb. 10) mit gegenseitiger Induktion als »kanonischer« Vierpol angeführt, der bei geeigneter Wahl seiner Schaltelemente im allgemeinen zu jedem beliebigen auch unsymmetrischen Vierpol ohne Ohmsche Widerstände äquivalent gemacht werden kann und der keine überflüssigen Schaltelemente enthält.

Schließlich soll noch darauf hingewiesen werden, daß die Siebschaltungen nur ein Problem unter einer Reihe nicht weniger wichtiger ähnlicher Aufgaben der Fernmeldetechnik bilden, bei denen es darauf ankommt, die Frequenzabhängigkeit von Schaltungen und die Aequivalenzfrage rechnerisch zu beherrschen und Schaltungen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit herzustellen. 992

[1]) E. N. T. Bd. 6 (1929), S. 272.

Über die graphische Berechnung der Strömungsverhältnisse und der Leistungsaufnahme in einem gegebenen Turbinenrad.[1]

Von **F. WEINIG** in Charlottenburg.

A. Die Aufgabenstellung.

1. Zweck der analytischen Verfahren. In neuerer Zeit ist man der Behandlung der Strömung in einem gegebenen Turbinenrad insofern bedeutend näher gekommen, als es gelungen ist, die ebene Strömung der idealen Flüssigkeit in speziell geformten Schaufelkränzen, wie solche aus radialen oder logarithmischspiraligen Schaufeln von vernachlässigbarer Dicke gebildet werden, exakt zu berechnen. Zu diesem Zwecke wurde das an sich räumliche Problem zu einem ebenen idealisiert, z. B. für den Fall der Pumpe die Eintrittsvorgänge durch eine Quelle oder auch Wirbelquelle im Mittelpunkt ersetzt und der Abfluß durch Fortlassen von Leitvorrichtungen und Spiralen als ins Unendliche erfolgend gedacht.

Eine Erweiterung der bisherigen Arbeiten auf analytischem Wege auf weitere spezielle Schaufelformen, insbesondere auf Schaufeln endlicher Dicke, ist zwar möglich, aber in Anbetracht der mit Rücksicht auf Herstellungsgründe zu wählenden Schaufelformen von nahezu konstanter Dicke unvorteilhaft. Auch aus strömungsphysikalischen Gesichtspunkten ist die weitere Ausdehnung der analytischen Betrachtungen nicht erstrebenswert, da ja gar keine physikalischen Gründe dafür vorliegen, daß die analytisch noch einfach zu behandelnden Formen nun auch praktische Vorzüge besitzen.

Für qualitative Aufschlüsse, wie etwa den des Einflusses der endlichen Schaufelzahl, des Radienverhältnisses und des Ueberdeckungsverhältnisses auf die Leistungsaufnahme sind die bisherigen Arbeiten ausreichend.

2. Die Aufgaben des graphischen Verfahrens. Es gibt aber noch andere Fragen von mehr strömungstechnischem Interesse, wie die Druckverteilung längs einer bestimmten Schaufelform, z. B. für die Beurteilung von Ablöse- und Kavitationserscheinungen, ferner der Einfluß von Variationen der Schaufelform und der Zuschärfungen, endlich auch der Einfluß der Verringerung des Durchflußquerschnitts durch die endliche Schaufeldicke auf die Leistungsaufnahme.

All dies ist von der speziellen Formgebung der Schaufeln abhängig, und die Variation der Schaufelform, die der Konstrukteur je nach der Beurteilung der Form vornehmen muß, ist mit rechnerisch in einfacher Weise erfaßbaren Schaufelformen kaum zu erreichen. Aus diesem Grunde ist bei gegebenen Schaufelformen ein graphisches Verfahren einem analytischen vorzuziehen, wenn es sich um die Erfassung spezieller Eigenschaften handelt. Natürlich wird man auch hier die Idealisierung des Turbinenradproblems zu einem ebenen zugrunde legen.

3. Anforderungen an das graphische Verfahren. Von einem graphischen Verfahren muß Einfachheit, Allgemeinheit, eine gewisse Dehnbarkeit und hinreichende Genauigkeit verlangt werden.

Was die Einfachheit betrifft, so muß vor allem jede Konstruktion im Endlichen durchführbar sein. Insbesondere dürfen die Integranden der vorkommenden Integrale nach Möglichkeit nicht unendlich werden oder die Integrationsgrenzen ins Unendliche fallen.

Für die Allgemeinheit des Verfahrens genügt, daß die zu machenden Annahmen immer zutreffen, daß also in unserem Falle jedes Turbinenrad, das praktischen Bedürfnissen entspricht, sich hiermit behandeln läßt. Das Verfahren soll eine Dehnbarkeit besitzen, indem nach Durchrechnung einer einzigen Pumpe mit Leichtigkeit aus den schon gewonnenen Resultaten neue abgeleitet werden können, etwa für Pumpen mit anderen Schaufelzahlen, veränderten Schaufeldicken und anderen Zuschärfungen.

Die Genauigkeit ist ein wesentlicher Gesichtspunkt für die Beurteilung eines graphischen Verfahrens. Die größte Genauigkeit bei gleichem Arbeitsaufwand wird erreicht, wenn die mit gleicher Sorgfalt erreichbare Genauigkeit in der ganzen Zeichenebene die gleiche ist.

---

[1]) Dissertation Techn. Hochschule Berlin. Referent Prof. Föttinger, Korreferent Prof. Fuchs.

B. Vorbereitende Ueberlegungen.

4. Die Strömungsanteile. Für die Durchführung der gestellten Aufgabe ist es zur Vereinfachung und Ermöglichung der Verallgemeinerung zweckmäßig, die Strömung in ihre verschiedenen Komponenten zu zerlegen. Man unterscheidet eine Relativ- und eine Absolutströmung, je nachdem man die Bewegungsvorgänge auf ein mit den Schaufeln rotierendes oder ein feststehendes Koordinatensystem bezieht. Die Relativströmung ist wegen ihrer konstanten Rotation keine Potentialströmung und deshalb der Rechnung nur indirekt über die Absolutströmung zugänglich.

Wir untersuchen daher im wesentlichen nur die Absolutströmung. Diese selbst zerlegt man in drei Anteile, nämlich in:

1. die radiale Durchflußströmung gegen den ruhenden Schaufelstern,
2. die Strömung infolge eines Eintrittsdralls gegen den ruhenden Schaufelstern,
3. die durch die Drehung des Schaufelsterns erzeugte Verdrängungsströmung.

Die radiale Durchflußströmung besteht:

1α) aus der radialen Strömung der im Mittelpunkt gelegenen Quelle, deren Stärke der Liefermenge der Pumpe entspricht, nach den Senken im Unendlichen;

1β) aus der zugehörigen, im ganzen quell- und zirkulationsfreien Störung dieser Strömung durch die Schaufeln;

1γ) aus der sich aus der Bedingung glatten Abfließens hierzu ergebenden Zirkulationsströmung um die Schaufel.

Die Strömung infolge des Eintrittsdralles Γ_i besteht:

2α) aus der Strömung eines im Mittelpunkt gelegenen Potentialwirbels Γ_i, der die Wirkung eines Eintrittsleitapparates ersetzen soll — beim Fehlen eines solchen, was bei Pumpen entsprechend radialem Eintritt in der Regel der Fall ist, muß $\Gamma_i = 0$ angenommen werden —;

2β) aus der zugehörigen quell- und zirkulationsfreien Störung dieser Strömung durch die Schaufeln;

2γ) aus der sich aus der Bedingung tangentialen Abfließens hierzu ergebenden Zirkulationsströmung um die Schaufel.

Die Verdrängungsströmung besteht:

3β)[1]) aus der durch die Drehbewegung hervorgerufenen quell- und zirkulationsfreien Schaufelströmung;

3γ) aus der sich aus der Bedingung des Endlichbleibens der Strömungsgeschwindigkeit an der Austrittskante ergebenden dazugehörigen Zirkulationsströmung.

Ueberlagert man all diese Strömungsanteile, so erhält man die Absolutströmung. Ueberlagert man dieser noch die einem Strömungsanteil 3α) entsprechende Rotation $\omega = \text{const.}$, so erhält man die Relativströmung. Die Strömungsanteile 1γ, 2γ, 3γ sind von gleicher Stromlinienform, jedoch verschiedener, der Größe der Zirkulationen Γ_{s1}, Γ_{s2}, Γ_{s3} entsprechender Stärke.

Im folgenden kennzeichnen die Indizes 1, 2, 3 Durchfluß-, Eintrittsdrall und Verdrängungsströmung; α, β, γ die Strömungsanteile ohne die Schaufel, die Störung durch die Schaufeln und die entsprechende Zirkulation; i, s innen und an der Schaufel; a, b Eintritts- und Austrittskante.

5. Die Bedingungen des glatten „wirbelfreien" Ein- und Austritts. Die Bedingung tangentialen glatten Abfließens ist bei am Austrittsende zugeschärften Schaufeln mit der Bedingung wirbelfreien[2]) Austritts identisch und erfahrungsgemäß bei allen gut geformten Turbinen- und Pumpenschaufeln und unter kleinen Anstellwinkeln auch bei Propeller- und Tragflügeln physikalisch verwirklicht.

Beim Entwurf ist der Eintrittsdrall (Strömungsanteil 2α) als gegeben zu betrachten und der wirbelfreie Eintritt durch richtige Formgebung, insbesondere Steigung und Krümmung der Schaufeleintrittsenden zu verwirklichen. Es ist dies aber für eine gegebene Winkelgeschwindigkeit (Strömungsanteil 3α) des Rades nur für eine entsprechende bestimmte Fördermenge, d. h. Durchflußströmung (Strömungsanteil 1α)

[1]) Anteil 3α siehe weiter unten; er gehört der Absolutströmung nicht an.

[2]) Für Schaufeln mit abgerundeter Austrittskante ist die Definition wirbelfreien Austritts von Prof. Föttinger (Kavitation und Korrosion, Hydraulische Probleme) gegeben worden, ebenso die des wirbelfreien Eintritts.

möglich, während der wirbelfreie Abfluß meist für einen weiten Bereich von Durchflußmengen physikalisch erzielbar ist. Um ein günstiges Arbeiten der Pumpe zu ermöglichen, ist auch ein wirbelfreier Eintritt anzustreben.

Der Zirkulationsanteil Γ_{s1} ist von der Liefermenge Q, Γ_{s2} vom Eintrittsdrall Γ_i, Γ_{s3} von der Drehzahl ω der Pumpe abhängig. Zwei von diesen Größen können willkürlich gewählt werden, die dritte ist durch die Bedingung glatten Eintritts gegeben. Verzichtet man auf die Erfüllung dieser Bedingung, so können alle drei Größen beliebig angenommen werden. Praktisch wählt man bei Pumpen fast immer radiales Zuströmen, indem man auf einen Eintrittsleitapparat verzichtet, weshalb man allgemein $\Gamma_i = 0$ setzen kann. Um jedoch diese Abhandlung, speziell im Hinblick auf die Anwendung auf Turbinen, vollständig zu machen, wurde im folgenden auch der Strömungsanteil infolge eines etwa vorhandenen Eintrittsleitapparates für Pumpen berücksichtigt.

6. Die Leistungsaufnahme. Die Leistungsaufnahme der Pumpe ergibt sich aus der Turbinengleichung[1]) zu

$$L = \varrho \cdot Q \cdot \Gamma_s \cdot \omega ,$$

wobei $\Gamma_s = \Gamma_{s1} + \Gamma_{s2} + \Gamma_{s3}$ die Gesamtzirkulation für alle Schaufeln der Pumpe ist; zu bemerken ist, daß man zweckmäßig die einzelnen Zirkulationsanteile für alle Schaufeln je für sich zusammenfaßt. Unter Q ist die Gesamtliefermenge, nicht die auf die einzelne Schaufel entfallende Menge zu verstehen.

7. Vereinfachung unter Berücksichtigung der Variationsmöglichkeit. Um der Forderung nach Variationsmöglichkeit genügen zu können, ist es zweckmäßig, die gegebene Schaufel endlicher Dicke zunächst durch eine geeignete, im Innern derselben gelegene Linie, das Rückgrat der Schaufel, zu ersetzen (Abb. 1). Hat man nämlich für diese reduzierten Schaufeln das Strömungsproblem gelöst, so genügt meist die Annahme eines geeigneten Quellsystems auf diesem Skelett, um die gegebene Schaufel selbst darzustellen.

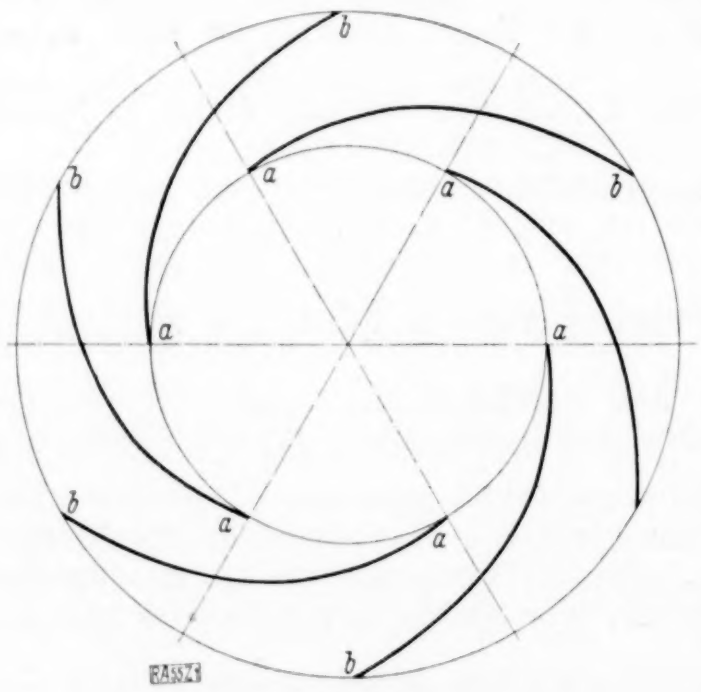


Abb. 1.

Die Variation dieses Quellsystems der Stärke und Verteilung nach gestattet dann die Variation der Schaufel nach Dicke und Zuschärfungen. Erfreulich ist, daß diese Ermöglichung der Variation gleichzeitig eine Vereinfachung des Problems mit sich bringt, da die Lösung der dazugehörigen Integralgleichungen praktisch wesentlich einfacher und schneller durchzuführen ist, als die zum ursprünglichen Problem gehörigen.

Um der Forderung nach Allgemeinheit des Verfahrens zu genügen, ist die konforme Abbildung unseres Schaufelsystems auf ein System ausgezeichneter Schaufelzahl notwendig. Ausgezeichnete Schaufelzahlen sind 1 und ∞. Beide Abbildungen würden der Forderung nach Allgemeinheit genügen.

8. Maßnahmen zur Erlangung gleicher Zeichengenauigkeit. Die Abbildung auf eine einzige Schaufel widerspricht aber der Forderung nach möglichst gleichmäßiger zeichnerischer Genauigkeit. Die innen gelegenen Teile der Schaufel würden durch die Abbildung auf eine einzige Schaufel nämlich bei den praktisch vorkommenden Schaufelzahlen, Winkeln und Ueberdeckungsverhältnissen den äußeren Teilen gegenüber sehr klein ausfallen. Die Eigenarten des Schaufeleintritts würden hierbei sehr verwischt und selbst erhöhte Zeichensorgfalt könnte nur wenig helfen. Diesen Weg schlagen wir daher nicht ein.

Anders ist dies bei der hier deshalb stets verwandten Abbildung auf unendlich viele Schaufeln (Abb. 2), das gerade Gitter. Hierdurch werden die Eintritts- und

[1]) Diese Gleichung wurde von Prof. Föttinger erstmalig in der Abhandlung »Ueber die physikalischen Grundlagen der Turbinen- und Propellerwirkung«, Z. F. M. 1912, S. 233 ff. entwickelt und von ihm 3. Turbinenhauptgleichung genannt.

Austrittsverhältnisse einander vollkommen gleichwertig. Jedem Stück der Schaufelkontur kommt gleiche zeichnerische Genauigkeit zu.

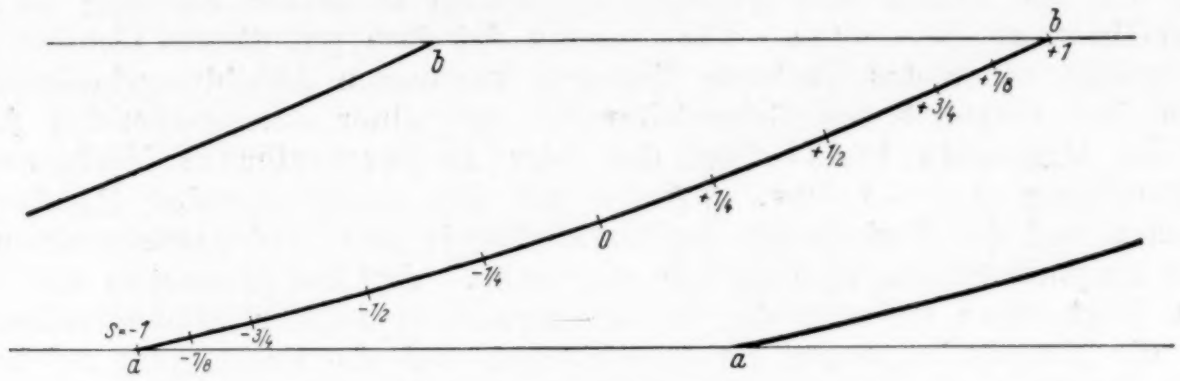


Abb. 2.

9. Skizzierung des Lösungsweges. Von den einzelnen Strömungskomponenten sind die Quellströmung 1α), der Eintrittsdrall 2α) und die Rotation 3α) gegeben. Für die Ermittlung der übrigen Komponenten genügt die Kenntnis der konformen Abbildung des Schaufelkranzes auf ein Profil bekannter Strömung, etwa auf einen Kreis (Abb. 3). Hierbei geht die Zirkulationsströmung (Strömungsanteil 1γ, 2γ, 3γ) um die einzelnen Schaufeln ohne weiteres in die Zirkulationsströmung um den Kreis über und ebenso die Quellströmung um die Schaufeln (Strömungsanteil $1\alpha + 1\beta$) bzw. die Eintrittsdrallströmung um die Schaufeln (Strömungsanteil $2\alpha + 2\beta$) in die entsprechende um den Kreis.

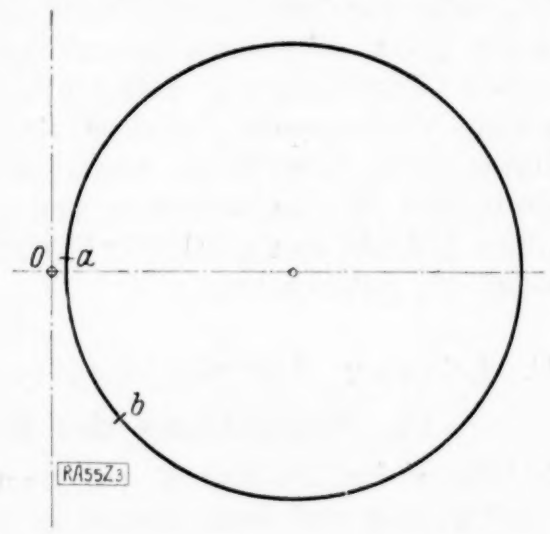


Abb. 3.

Die Schaufelströmung (Strömungsanteil 3β), die der Rotation entspricht, erhält man durch die vermittels der konformen Abbildung auf den Kreis übertragbaren Randbedingungen (Abb. 12). Für den Kreis läßt sich aber die Lösung der Randwertaufgabe sofort durch bestimmte Integrale angeben.

Für die graphische Durchführung der konformen Abbildung genügt die Kenntnis der punktweisen Zuordnung der Kreisebene und eines entsprechenden Streifens der Schaufelgitterebene. Hierzu ist aber wiederum nur die Kenntnis eines entsprechenden Strömungsbildes in beiden Ebenen notwendig.

Die direkte Ermittlung der Schaufelrotationsströmung in beiden Ebenen ist ohne die Kenntnis der Abbildungsfunktion oder der diese graphisch zum Ausdruck bringenden punktweisen Zuordnung der Konturen nicht möglich. Die übrigen Strömungsanteile sind aber jeder für sich allein aus den Randbedingungen heraus in beiden Ebenen direkt zu ermitteln. Die Berechnung macht in jedem Falle die Lösung einer entsprechenden Integralgleichung notwendig. Die Entscheidung darüber, welche dieser Teilströmungen am zweckmäßigsten direkt ermittelt wird, ist aus Gründen der zeichnerischen Genauigkeit zu treffen.

In der Kreisebene ist die Zirkulationsströmung die einfachste und zeichnerisch gleichmäßigste, da sie nur aus konzentrischen Kreisen besteht. Auch in der geraden Schaufelgitterebene ist sie infolge des Fehlens von Staupunkten[1]) als die für die direkte Ermittlung geeignetste anzusehen. Wir werden uns daher um die Ermittlung dieser Strömung in erster Linie bemühen.

Man kann sich diese Strömung durch eine geeignete Wirbelbelegung der Schaufeloberfläche, bzw. des Rückgrats entstanden denken. Sie läßt sich aus einer Integralgleichung ermitteln. Aus dieser Wirbelbelegung ergibt sich dann übrigens auch durch Benutzung eines Integrals der analytische Ausdruck der Abbildungsfunktion[2]); er wird aber in der vorliegenden Arbeit nicht selbst benutzt, da für graphische Berechnung die punktweise Zuordnung zweckmäßiger ist.

---

[1]) In der Kreisgitterebene hat die Zirkulationsströmung auch keine Staupunkte mit Ausnahme des isolierten Staupunkts im Mittelpunkt, dem beim geraden Gitter ein solcher im $-\infty$ entspricht.

[2]) Vergl. Plemelj l. c. S. 66.

10. Vergleich des Prinzips des hier durchgeführten Verfahrens mit den sonst üblichen. Bevor nun an die eigentliche Lösung gegangen wird, ist es vielleicht angebracht, das zur Anwendung gelangende Prinzip in seiner Stellung zu den sonst üblichen Verfahren zu beleuchten. Die anderen Arbeiten auf diesem Gebiete gehen alle von der Kenntnis einer das Problem lösenden konformen Abbildungsfunktion aus und müssen sich bei vorgegebenen Schaufelformen mit einer entsprechenden Annäherung begnügen. Im Gegensatz hierzu legt das hier zu beschreibende Verfahren eine die Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ bzw. $\Delta \psi = 0$ mit den entsprechenden Randbedingungen im unendlichen und die Periodizität berücksichtigende nur in Schaufelpunkten singuläre Lösung, das unsymmetrische Wirbelgitter, zugrunde. Aus der Linearität der Differentialgleichungen folgt ohne weiteres die Ueberlagerbarkeit solcher Elementarlösungen und zwar ohne die Randbedingungen im unendlichen und die Periodizität zu beeinflussen. Verteilt man die Elementarlösungen so, daß ihre singulären Stellen nur auf dem Schaufelskelett liegen, so kann man ihre Intensität so bestimmen, daß auch die Randbedingungen auf den Schaufeln erfüllt bleiben.

Während also die üblichen Verfahren nur rein rechnerisch vorgehen und demnach der für den Ingenieur notwendigen Anschaulichkeit entbehren, ist die vorliegende Lösung leicht graphisch durchzuführen und auch recht anschaulich. Ein weiterer Vorzug des benutzten Verfahrens ist, daß es prinzipiell nicht an das Ebensein der Aufgabe gebunden ist, wie die konforme Abbildung. Es lassen sich mit Quellen, Senken und Wirbelfaden auch ganz allgemein räumliche, insbesondere achsen- und schraubensymmetrische Aufgaben durchführen, was vielleicht künftig von Wichtigkeit sein kann. Obwohl nun das ganze vorliegende Problem sich mit Hilfe von entsprechenden Elementarlösungen bewältigen ließe, wird doch, nachdem einmal die Zuordnung von Schaufeln und Bildkreispunkten gefunden ist, im weiteren von den Methoden der konformen Abbildung Gebrauch gemacht, ohne jedoch den rechnerischen Ausdruck der Abbildungsfunktion irgendwie aufzustellen oder zu gebrauchen.

C. Lösung der die konforme Abbildung vermittelnden Integralgleichung.

11. Aufstellung der Integralgleichung. Für einen einzelnen Wirbel von der Stärke $\bar{\nu}'$ im Punkte S auf dem Schaufelskelett s im geraden Gitter, wobei s etwa die Entfernung auf dem Bogen gemessen vom Schaufeleintrittsende sein kann, ist die Stromfunktion ψ in einem Aufpunkt P

$$\psi(P) = -\frac{1}{2\pi}\bar{\nu}' \ln r(P, S),$$

worin r die Entfernung der Punkte P und S ist. Für auf einer oder mehreren Linien s kontinuierlich verteilte Wirbel von der auf die Längeneinheit bezogenen Dichte $\nu'(s)$ erhält man durch Integration

$$\psi(P) = -\frac{1}{2\pi}\int \nu'(s) \ln r(P, S)\, d\, s\,,$$

wobei das Integral über alle Wirbel, bei uns also über alle Schaufeln des geraden Gitters, dessen Teilung 2π sein soll, zu erstrecken ist.

Für Punkte $P \to T$ in der Nähe der Schaufel, wobei T die Bogenlänge t vom Schaufeleintrittspunkt gemessen haben möge, und für die zu erzeugende Zirkulationsströmung muß

$$\psi(t) = -\frac{1}{2\pi}\int \nu'(s) \ln r(t\, s)\, d\, s = \text{Const.}$$

sein. Da $\nu'(s)$ gesucht ist, ist dies eine Integralgleichung, die wir nunmehr graphisch zu lösen haben.

12. Umformung des Integrals für die graphische Durchführung. Weil in unserem Falle die Belegungen auf allen Schaufeln einander entsprechen, empfiehlt es sich bei der Integration immer die auf den verschiedenen Schaufeln sich entsprechenden Wirbel zusammenzufassen. Statt $\Sigma \ln r(t\, s)$ [1]) führt man zweckmäßig $\ln \bar{r}(t\, s)$ ein. Die

[1]) In dieser Summe müssen auch die im Unendlichen vorhandenen Gegenwirbel der Gitterwirbel berücksichtigt werden. Dem Sinne unserer Aufgabe entsprechend können diese Gegenwirbel aber nur im $+\infty$ des geradeu Gitters liegen. Denn das $-\infty$ des geraden Gitters entspricht dem Mittelpunkt des gegebenen Kreisgitters, der ein regulärer Punkt ist. Unter Wirbelgitterströmung ist also in unserer

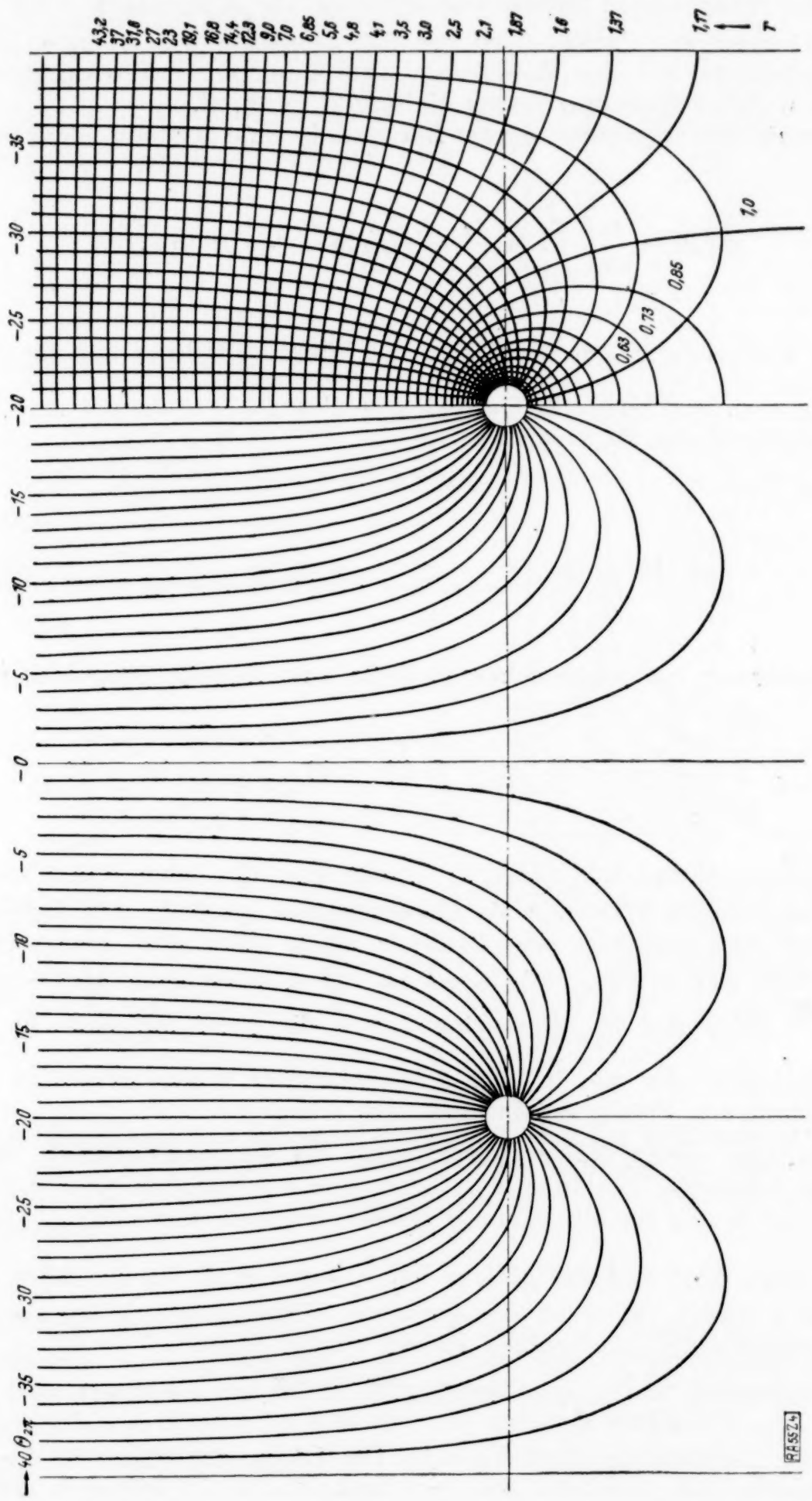


Abb. 4.

Benutzung dieser Funktion $\bar{r}$ ermöglicht es, daß man damit nur noch über eine einzige Schaufel zu integrieren braucht.

Anwendung eine unsymmetrische Strömung entsprechend Abb. 4 zu verstehen. Sie entsteht durch konforme Abbildung eines einzigen Wirbels mit dem Mittelpunkte $|z_m| > 0$ in der z-Ebene in die Ebene $w = \ln z$. Wir wählen zweckmäßig $|z_m| = 1$. In der vorhandenen Literatur wird sonst nur das symmetrische Wirbelgitter benutzt. Solange die Gesamtzirkulation $\Gamma_s = 0$ ist, ist dies bedeutungslos. Für Zirkulationsströmungen führt dies aber zu Schwierigkeiten, die ich durch Einführung des unsymmetrischen Wirbelgitters umgangen zu haben hoffe.

Soll bei der Turbinenrad-Zirkulationsströmung der Mittelpunkt, oder entsprechend bei der Gitterströmung der Punkt $-\infty$, die Stromfunktion $\psi = 0$ haben, so ist $\bar{r}$ der Abstand der Bildpunkte bei der konformen Abbildung eines Wirbelgitters auf einen einzigen Wirbel in der Entfernung 1 vom Nullpunkt (Abb. 4).

Für die graphische Durchführung des Integrals ist eine partielle Integration praktisch. Man erhält

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \nu(s)\frac{d\bar{r}}{\bar{r}} - \nu(b)\ln\bar{r}_b + \nu(a)\ln\bar{r}_a\right].$$

Hierbei bedeutet $\nu(s) = \int_a^s \nu'(s)\,ds$, wenn $\nu'(s)$ die Wirbelverteilung auf den Schaufeln des Gitters ist. Statt $\nu(s)$ setzt man für Punkte $P \to T$ auf der Schaufel um bei der Integration uneigentliche Werte zu vermeiden

$$\nu(s) = [\nu(s) - \nu(t)] + \nu(t)$$

und erhält

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \frac{\nu(s)-\nu(t)}{\bar{r}}\,d\bar{r} - [\nu(b)-\nu(t)]\ln\bar{r}_b + [\nu(a)-\nu(t)]\ln\bar{r}_a\right]$$

und durch Verwandlung der ausgerechneten Teile zum Zwecke graphischer Berechnung in Integrale [1]).

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \frac{\nu(s)-\nu(t)}{\bar{r}}\,d\bar{r} - \int_1^{\bar{r}_b} \frac{\nu(b)-\nu(t)}{\bar{r}}\,d\bar{r} + \int_1^{\bar{r}_a} \frac{\nu(a)-\nu(t)}{\bar{r}}\,d\bar{r}\right].$$

Die graphische Integration (Abb. 5) erfolgt nun für jeden Punkt t dadurch, daß man über den zugehörigen Werten $\bar{r}$ als Abscissen $\nu(s)$ als Ordinaten aufträgt, dann zur Abscissenachse im Abstande $\nu(t)$ eine Parallele zieht. Von dort gemessen haben die Ordinaten den Wert $\nu(s) - \nu(t)$. Für $s \to t$ ist $\bar{r} \to 0$, aber auch $\nu(s) - \nu(t) \to 0$. Die Division $\frac{\nu(s)-\nu(t)}{\bar{r}}$ führt also im allgemeinen auch für $s \to t$ auf endliche Werte. Die Division kann beispielsweise wie in Abb. 5 in bekannter Weise graphisch durchgeführt werden. Die entstehende Fläche ist das gesuchte Integral.

13. Annahme einer Näherungslösung als Ausgangspunkt für eine gut konvergierende Lösung. Bestände das Gitter nur aus geraden Schaufeln und ersetzt man $\sum_i \ln r_i(t\,s)$ durch den im allgemeinen größten Sumanden $\ln r_0(t\,s)$, wenn t auf dem Gitterstab $i = 0$ liegt, oder was das gleiche ist, $\bar{r}$ durch r, da in der Nähe eines Gitterwirbels $\lim \bar{r}/r \to 1$ wird [2]), so wäre die gesuchte Wirbelverteilung die gleiche wie die bei der zirkulationsumströmten einzelnen ebenen Platte, nämlich

$$\nu'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \qquad \nu(x) = \frac{\arccos -x}{\pi}. \qquad \text{(Abb. 11).}$$

Hierbei beträgt die Gesamtzirkulation $\Gamma_E = 1$. Die Länge der Platte ist $l = 2$, Anfangs- und Endpunkt haben die Abscissen $x = -1$ und $x = +1$. Die sich hieraus für die Oberfläche der Platte ergebende Stromfunktion ist $\psi = \text{const}$.

Wir setzen die entsprechende Gesamtlänge unserer Gitterschaufel $l = 2$ und wählen zum Messen von s die Mitte als Nullpunkt, also

$$-1 < s < +1$$

und setzen als Näherungswert für $\nu(s) \sim$

$$\nu_x(s) = \frac{\arccos -s}{\pi}.$$

[1]) Die Teile $1-a$ und $b-1$ bei der Umhüllung der Integralfläche in Abb. 5 sind Hyperbeln.

[2]) Das Feld des Wirbelgitters und des einzelnen Stabwirbels werden nämlich in der Nähe der Wirbel kongruent.

Setzen wir dies nun in unser Linienintegral ein, so erhalten wir eine Sromfunktion $\psi_0(t)$ (Abb. 10). Wir finden aber, daß diese nicht wie wir es haben wollen, konstant ist und daß daher auch die Normalkomponente der Geschwindigkeit $\frac{\partial \psi_0}{\partial s}$ längs der Schaufel nicht verschwindet.

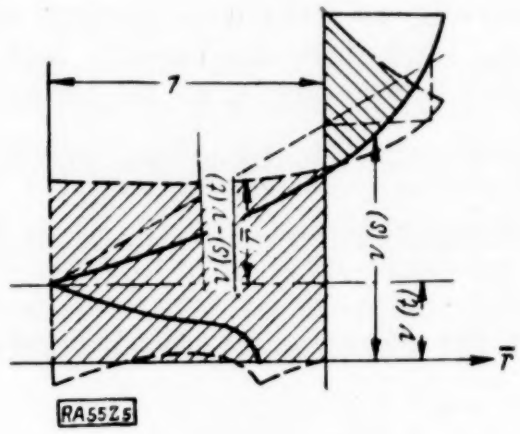


Abb. 5.

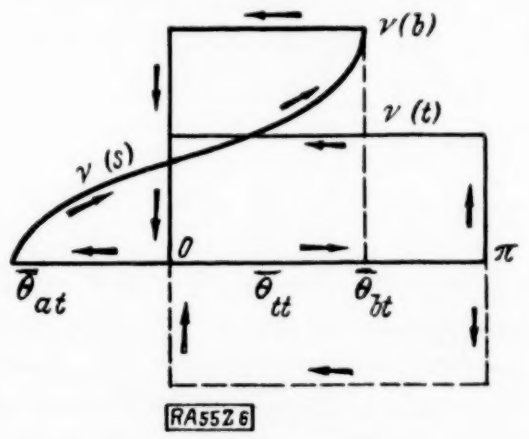


Abb. 6.

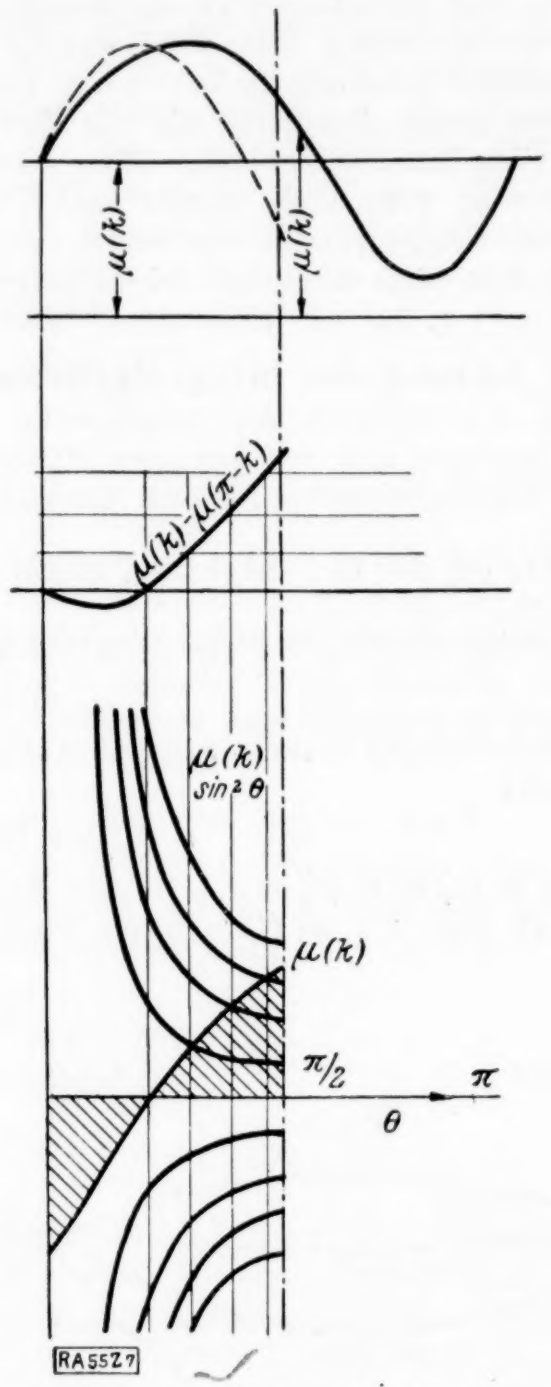


Abb. 7.

14. Aufstellung der Integralgleichung für die Ergänzung zur Näherungslösung. Es tritt demnach auf den Seiten unserer Schaufel bei der aus der Näherungslösung resultierenden Strömung Flüssigkeit aus bzw. ein. Für uns ist insbesondere die Normalkomponente

$$c_n = \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \qquad \text{(Abb. 9)}$$

wissenswert. Wir haben nämlich nunmehr eine im ganzen zirkulationsfreie Ergänzungsströmung $-\psi_0(s)$, die die umgekehrten Normalkomponenten besitzt, zu suchen.

Wir bekommen sie aus einer Wirbelverteilung, deren Gesamtzirkulation Null ist, für die also $\nu_0(a) = \nu_0(b) = 0$ ist und die wir aus der Beziehung

$$\psi_0(t) - N = \frac{1}{2\pi}\left[\int \frac{\nu_0(s) - \nu_0(t)}{\bar{r}}\, d\bar{r} + \int \frac{\nu_0(t)}{\bar{r}}\, d\bar{r}\right]$$

bestimmen können. Dies ist eine Integralgleichung, die nur bei richtiger Wahl der Konstanten N eine Lösung besitzt, deren Gesamtzirkulation gleich Null ist.

Zur Lösung dieser Gleichung und zur Bestimmung dieser Konstanten bedienen wir uns eines besonders für graphische Durchführung geeigneten Verfahrens[1]). Man geht hierbei von der Annahme aus, daß es möglich ist, durch Vornahme einer (eindeutig umkehrbaren) Operation aus der linken Seite der Integralgleichung einen Ausdruck zu finden, der an Stelle der unbekannten Funktion in die Integralgleichung eingesetzt, die

[1]) Dies Verfahren wurde von mir erstmalig Zeitschr. f. techn. Physik 1928, Heft 1 zur Ermittlung der Strömung um gegebene Rotationskörper und der ebenen Strömung um gegebene Profile verwandt.

linke Seite der Integralgleichung annähernd wiedergibt, daß dieser Ausdruck also als erste Näherungslösung betrachtet werden kann. Nimmt man die gleiche Operation wieder an der neugewonnenen linken Seite vor, und setzt das Resultat rechts ein, so gewinnt man wieder einen Ausdruck für die linke Seite, der aber jetzt schon etwas mehr von dem ursprünglichen abweicht. Man kann nun weiter in dieser Weise iterieren. Hierdurch entfernt man sich immer mehr von dem ursprünglich gegebenen. Die wirkliche Lösung der Integralgleichung findet man dann durch rückwärtige Extrapolation.

Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß die Neumannsche Lösung für Integralgleichungen [1]) 2. Art ein Sonderfall dieses Verfahrens ist.

15. Lösung der Integralgleichung für die Ergänzung der Näherungslösung. Um einen brauchbaren Ausgangspunkt für die Lösung zu erhalten, machen wir wieder von der Analogie mit der geraden Platte Gebrauch. Sind dort auf Vorder- und Rückseite konstante entgegengesetzt gleiche Normalkomponenten vorhanden [2]), so ist der Integralwert $v_1(x) = \int_{-1}^{x} v_1'(x)\,dx$ der insgesamt zirkulationsfreien Wirbelverteilung, die auf der Vorder- und Rückseite konstante entgegengesetzt gleiche Normalkomponenten c_n bedingt,

$$v_s(x) = 2\sqrt{1-x^2}\,c_n.$$

Entsprechend setzen wir als Näherungswert für die gesuchte Wirbelverteilung auf der Schaufel

$$v_0(s) \sim v_1(s) = 2\sqrt{1-s^2}\,c_n(s).$$

Weiter ist $v_1(a) = v_1(b) = 0$. Setzen wir $v_1(s)$ in unser Integral ein, so erhalten wir einen Wert, den wir $\psi_1(t)$ nennen wollen. Durch Differenziation erhalten wir

$$c_{n1} = \frac{\partial\,\psi_1(s)}{\partial\,s}$$

und hieraus $v_2(s) = 2\sqrt{1-s^2}\,c_{n1}$.

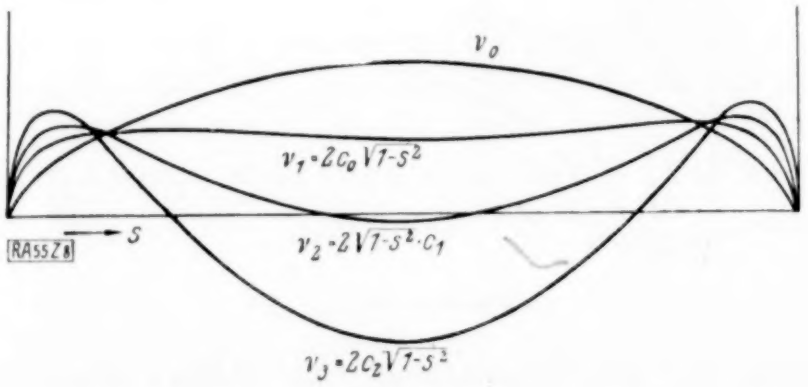


Abb. 8.

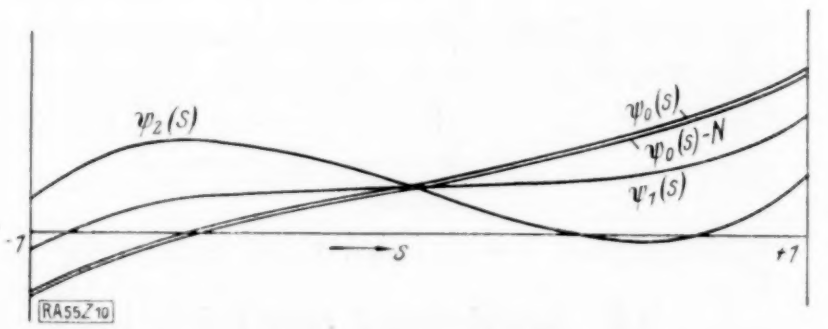


Abb. 10.

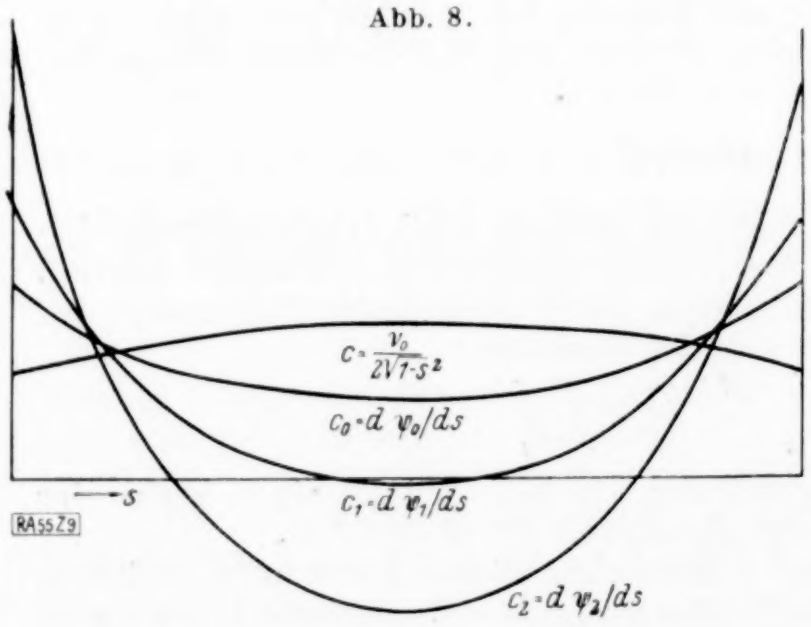


Abb. 9.

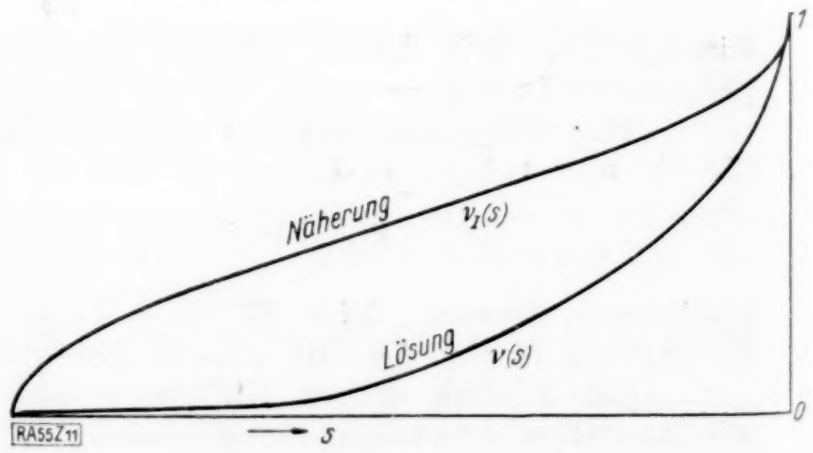


Abb. 11.

[1]) Vergl. Neumann l. c.

[2]) Vorder- und Rückseite der Platte wie der Schaufel sind getrennt zu betrachten. Die Spur der Platte stellt einen Schlitz der Ebene dar. Bei der konformen Abbildung auf einen Kreis werden daher die Punkte der Vorder- und Rückseite verschiedene Kreispunkte. Das Vorzeichen der Normalkomponenten bestimmt sich daraus, ob die Strömung auf die Kontur zu oder von ihr weggerichtet ist.

Setzen wir diesen Wert in unser Integral ein, so bekommen wir ψ_2 und entsprechend ψ_3 usw. (Abb. 10). Ebenso erhalten wir $v_3(s)$, $v_4(s)$ usw. Tragen wir diese Werte als Kurven über s auf, so können wir aus der Schar . . . v_4, v_3, v_2, v_1 eine Funktion v_0 extrapolieren (Abb. 8) bzw. aus . . . c_{n3}, c_{n2}, c_{n1}, c_{n0} eine Funktion c_{n-1} (Abb. 9), deren Einsatz in das Linienintegral $\psi_0(t) = \psi_0(t) - N$, also die gewünschte Stromfunktion $\psi_0(s)$ und die vorher unbekannte Konstante N liefert (Abb. 10). Wir können aber auch aus der Schar . . . ψ_3, ψ_3, ψ_2, ψ_1 das uns bis auf eine Konstante N schon bekannte ψ_0 und hieraus ein ψ_{-1} extrapolieren, aus dem wir

$$v_0(s) = 2\sqrt{1-s^2}\,\frac{\partial\,\psi_{-1}(s)}{\partial\,s}$$

bekommen würden.

Durch Abzug der Wirbelbelegung $v_0(s)$ von $v_x(s)$ erhalten wir die Wirbelbelegung, die die Zirkulation um das gegebene Schaufelprofil bedingt (Abb. 11).

Obgleich nun bei einiger Uebung im vorliegenden Fall durch die zweckmäßig graphisch vorzunehmende Extrapolation befriedigende Resultate gewonnen werden können, so ist es doch unter Umständen erwünscht, besonders wenn die Iterierten wie in vorliegendem etwas stärker von einander abweichen, die Lösung etwas weniger von Willkür und Uebung abhängig zu machen. Man braucht dann eben nur nach einer geeigneteren ersten Näherungslösung zu suchen. Dies wäre z. B. durch

$$v_0(s) \sim v_1(s) = 2\sqrt{1-s^2}\,c_n(s)\,[a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots a_n s^n]$$

möglich, wenn man entsprechende Koeffizienten a_0, a_1, a_2 . . . bestimmt. Hat man sich über die Anzahl $(n+1)$ der Koeffizienten entschieden, so wählt man auf der Schaufel eine um 1 größere Anzahl $(n+2)$ von geeigneten Aufpunkten, wofür mann dann die $(n+1)\cdot(n+2)$ Integrationen für

$$\begin{aligned} v_{10}(s) &= 2\sqrt{1-s^2}\,c_n(s)\cdot a_0, \\ v_{11}(s) &= 2\sqrt{1-s^2}\,c_n(s)\cdot a_1\cdot s, \\ v_{12}(s) &= 2\sqrt{1-s^2}\,c_n(s)\cdot a_2\cdot s^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

auszuführen hat. Das zur Bestimmung der $a_i\,(i = 0 \div n)$ dienende Gleichungssystem besteht aus $n+2$ linearen Gleichungen. Außer den Koeffizienten a_i muß auch die Konstante N als unbekannt betrachtet werden. Bei der Lösung unserer Aufgabe würde man mit $n = 2$ eine sehr gute erste Annäherung bekommen, die durch Iteration und Extrapolation dann noch weitgehend verbessert werden könnte.

D) Berechnung der für die Leistungsaufnahme maßgeblichen Größen.

16. Aufsuchen des Bildkreises mit Hilfe der Integrationskonstanten. Wir finden beim Einsetzen der gefundenen Wirbelbelegung als Wert der Stromfunktion an der Schaufel für die Zirkulationsströmung

$$\psi(t) = N.$$

Nun interessiert auch die Stromlinie $\psi = 0$.

Dies ist die Stromlinie, die in der Schaufelgitterströmung durch $-\infty$ und bei der Abbildung des Gitters auf eine einzige Schaufel durch den Mittelpunkt geht.

Daß der Punkt $-\infty$ der Gitterströmung die Stromfunktion $\psi =$ Null haben muß, ist aus dem Integral

$$\psi(-\infty) = \frac{1}{2\pi}\int v'(s)\,\ln \bar{r}(-\infty, s)\,ds = 0$$

zu ersehen, da ja nach Annahme $\bar{r}(-\infty, s) = 1$ wird.

Die Stromlinie 0 ist aber sicher nicht identisch mit der Schaufelkontur. Wäre nämlich $\psi(t)$ ebenfalls gleich Null, so müßte auch das gesamte übrige Feld den Wert $\psi = 0$ haben, sonst müßten darin Extreme von ψ vorhanden sein, was der Forderung nach Regularität von ψ im endlichen außerhalb der Schaufel widerspräche. Der Wert der Stromfunktion auf der Schaufel ist also eine gewisse von Null verschiedene Konstante $N \neq 0$.

Das Aeußere der einzigen Bildschaufel kann man nun auf das Aeußere eines Kreises abbilden. Hierbei wird aus der Stromlinie $\psi = \ln \bar{r} = 0$ der Zirkulationsströmung
$r=1$

ein Kreis mit dem Radius 1. Der Schaufel selbst muß der Kreis vom Radius R mit dem Werte

$$\psi = N = \frac{-1}{2\pi} \ln R$$

entsprechen.

17. Die dem Schaufelein- und Austrittspunkt entsprechenden Punkte auf dem Bildkreis und die gegenseitige Zuordnung der übrigen Punkte. Um die auf Schaufel und Kreis entsprechenden Punkte einander zuzuordnen, muß man das Geschwindigkeitspotential φ auf der Schaufel aus der gefundenen Wirbelverteilung ermitteln. Man erhält es durch Integration aus

$$\varphi\,(P) = \frac{1}{2\pi} \int \gamma'\,(s)\,\Theta\,(P\,S)\,d\,s,$$

wobei $\Theta\,(P\,S) = \operatorname{arctg} \frac{y_p - y_s}{x_p - x_s}$ ist, wenn (x_p, y_p) und (x_s, y_s) die Koordinaten der Punkte P und S sind. Wir wählen die y-Achse in Richtung der Gitterachse. Entsprechend der obigen Ersatzfunktion $\bar{\gamma}$ wählen wir auch ein $\overline{\Theta}$.

Durch partielle Integration formt man in

$$\varphi\,(P) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma\,(b)\,\overline{\Theta}\,(P, b) - \gamma\,(a)\,\overline{\Theta}\,(P, a) - \int_a^b \gamma\,(s)\,\frac{d\,\overline{\Theta}}{d\,s}\,d\,s\right]$$

um. Für Punkte $P \to T$ wird der Integrand für $s \to t$ uneigentlich. Durch Herausnahme des entsprechenden Wertes erhält man

$$\varphi\,(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma\,(b)\,\overline{\Theta}\,(t, b) \pm \pi \cdot \gamma(s) - \int_{\overline{\Theta}_b}^{\overline{\Theta}_a} \gamma\,(t)\,d\,\overline{\Theta}\,(t\,s)\right]$$

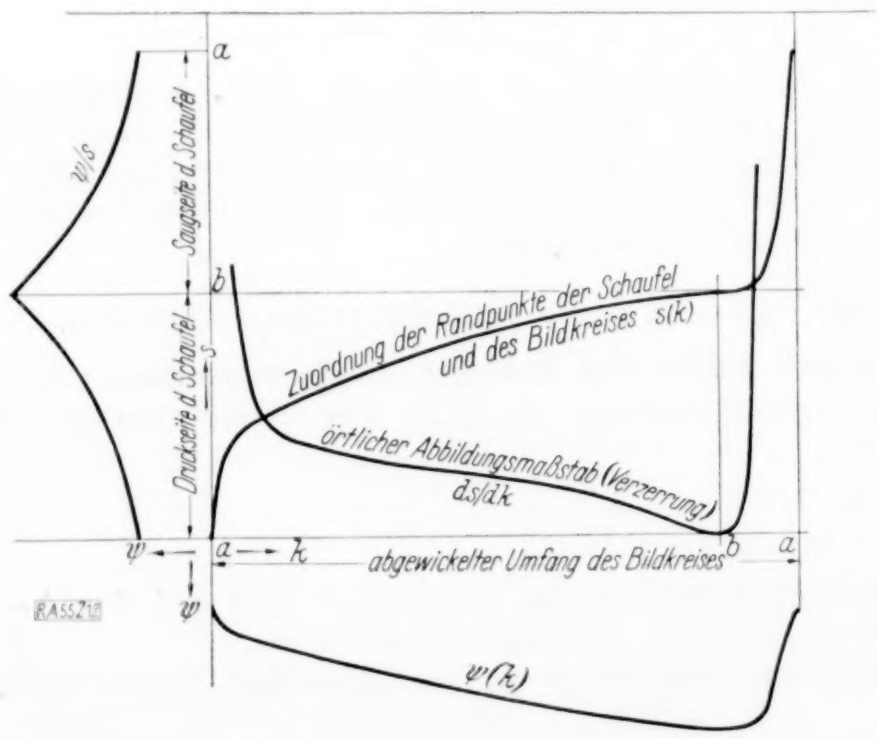


Abb. 12.

(Abb. 6). Das eine Vorzeichen ist für die Vorder- und Rückseite der Schaufel verschieden und zwar auf der konvexen $+$, auf der konkaven $-$.

Zu beachten ist, daß $\gamma(a) = 0$ und, da die Gesamtzirkulation zu $\Gamma_{s_E} = 1$ angenommen wurde, $\gamma(b) = 1$ ist. Da nun $\overline{\Theta}$ zyklisch vieldeutig ist, so ist auch der Wert $\varphi\,(t)$ in dieser Beziehung vieldeutig und wird nach jedem Umlauf um 1 größer.

Entsprechende Punkte auf Schaufel- und Bildkreis haben gleiches Potential. Die Verteilung des Potentials auf dem Kreis ist bekannt und die Konstante durch die sich ergebende Lage des Koordinatensystems festgelegt. Somit haben wir auch neben den den andern Punkten die dem Ein- und Austrittspunkt auf der Schaufel entsprechenden Punkte auf dem Bildkreis gefunden (Abb. 12).

18. Die Strömung aus der Einheitsquelle und die ihr entsprechende Schaufelzirkulation. Bringen wir im Nullpunkt der Bildkreisebene zur Herstellung einer Durchflußströmung eine Einheitsquelle, deren Ergiebigkeit $Q_E = 1$ sei, an, so erhalten wir die Strömung um den Kreis bekanntlich dadurch, daß wir die Quelle am Kreise mittels reziproker Radien spiegeln und in der Kreismitte eine Senke anordnen.

Insbesondere interessieren uns die Geschwindigkeiten w_{a1} und w_{b1} in den Punkten a und b. Diese sind im allgemeinen von Null verschieden. Damit aber der Bedingung glatten Abfließens genügt wird, muß die Geschwindigkeit im Punkte b des Kreises Null

werden. Dies erreicht man bei der Ergiebigkeit Q durch Ueberlagerung einer Zirkulation von der Stärke

$$\Gamma_{s1} = \frac{Q}{Q_E} \cdot 2\,\pi\,R \cdot w_{b1}\,.$$

19. Die Strömung aus dem Eintrittsdrall und die ihr entsprechende Schaufelzirkulation. Bringen wir zur Berücksichtigung der Wirkung eines etwa vorhandenen Leitapparates im Nullpunkt der Bildkreisebene einen Einheitswirbel $\Gamma_{i_E} = 1$ an, so erhalten wir die Strömung um den Kreis wieder durch Spiegelung. Im Spiegelpunkt der Pumpenmitte ist jetzt aber ein Wirbel von der Stärke $-\Gamma_{i_E}$ und in der Kreismitte von der Stärke $+\Gamma_{i_E}$ anzubringen.

Auch hier müssen wir, um wirbelfreien Austritt zu erzielen, eine Zirkulation um den Kreis überlagern. Diese wird für den Eintrittsdrall Γ_i

$$\Gamma_{i_2} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i_E}} \cdot 2\,\pi\,R \cdot w_{b_2}.$$

20. Die Verdrängungsströmung und die ihr entsprechende Schaufelzirkulation. Läßt man das gegebene Pumpenrad, dessen Außenradius zu $r_b = 1$ angenommen ist, mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_E = 1$ rotieren, so erhält man eine absolute Verdrängungsströmung, deren Normalkomponenten an der Schaufeloberfläche

$$c_n = \omega \cdot r \cdot \cos\alpha$$

werden, wobei α der Winkel zwischen Fahrstrahl r und Schaufel ist.

Die entsprechende Stromfunktion ist bis auf eine Konstante

$$\psi_3 = \omega/2 \cdot r^2.$$

Die Abbildung des Schaufelkranzes von β Schaufeln auf eine einzige Schaufel ergibt

$$\psi_1 = \omega/2 \cdot r^{2/\beta}$$

und die Abbildung dieser auf ein Gitter

$$\psi_g = \omega/2 \cdot e^{\frac{2x}{\beta}}.$$

Bildet man dieses Gitter auf einen Kreis ab, so müssen in den am Kreis und an der Gitterschaufel entsprechenden Punkten bei der entsprechenden Strömung gleiche ψ-Werte vorhanden sein.

Diese durch konforme Abbildung auf den Kreis übertragbaren Randbedingungen (Abb. 12) sind nun durch eine auf dem Kreis gelegene Doppelquellverteilung, deren Achsen tangential zum Kreis liegen, von der Stärke

$$M(k) = 2\,\psi(k)$$

zu erzeugen. Auf die Konstante in ψ kommt es dabei nicht an.

Der Beweis besteht in einer naheliegenden Anwendung der Poissonschen Formel, kann aber auch durch Verifikation sehr leicht geführt werden. Für eine Doppelquellverteilung von der Stärke $M(k)$, deren Achsen in Richtung der Tangenten der Verteilungslinie liegen, ist nämlich

$$\psi(P) = -\frac{1}{2\,\pi}\int M(k)\,d\,\Theta(P\,k).$$

Für Punkte $P \to \varkappa$ auf dieser Linie erhält man ein uneigentliches Integral, dessen Auswertung

$$\psi(\varkappa) = \frac{1}{2\,\pi}\,M(\varkappa) - \frac{1}{2\,\pi}\oint M(k)\,d\,\Theta(\varkappa\,k)$$

ergibt. Beim Kreis ist nun aber der von der Tangente aus zu messende Peripheriewinkel Θ gleich dem halben Zentriwinkel α; das noch verbleibende Integral ist demnach der halbe Mittelwert von $2\,\pi\,M(k)$ und somit konstant. $M(\varkappa)$ ist aber zu $2\,\psi$ eingesetzt worden, so daß der Beweis erbracht ist.

Von der entstehenden Strömung interessieren uns besonders die Geschwindigkeiten auf der Oberfläche des Kreises, hauptsächlich in den Punkten a und b. Die Normalkomponenten sind aus

$$c_n = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,k}$$

gegeben. Die Tangentialkomponenten bei Verteilung auf einem Kreis erhält man durch

$$c_{k_3} = \frac{1}{2\,\pi}\oint \frac{M(k) - M(\varkappa)}{r^2(\varkappa\,k)}\,d\,k.$$

Da wir über einen Kreis zu integrieren haben, können wir dieses Integral noch vereinfachen. Es ist

$$r = 2\,R \sin \Theta, \qquad d\,k = 2\,R\,d\,\Theta.$$

Wenn Θ den von der Tangente aus gemessenen Peripheriewinkel bedeutet. Wir erhalten durch Einsetzen

$$c_{k_3} = \frac{1}{4\,R\,\pi} \oint_0^{\pi} \frac{M(k) - M(\varkappa)}{\sin^2 \Theta}\, d\,\Theta.$$

Da nun $\sin \Theta = \sin(\pi - \Theta)$ ist, addiert man zweckmäßig die Integranden für Θ und $\pi - \Theta$, wodurch der Integrand immer endlich bleibt (Abb. 7).

Da es keinen großen Mehraufwand an Zeit beansprucht, ermitteln wir die $c_s(a) = w_{a_3}$ und $c_s(b) = w_{b_3}$ Werte für einige verschiedene Schaufelzahlen $\mathfrak{z}$. Man erfaßt damit den Einfluß der Schaufelzahl bei konstantem Ueberdeckungsverhältnis.

Damit im Punkte b der Schaufel die Strömungsgeschwindigkeit endlich bleibt, muß bei der Strömung am Kreis die entsprechende Geschwindigkeit Null sein. Man hat also auch hier eine entsprechende Zirkulation zu überlagern. Wir würden aber damit nur den Zirkulationsanteil einer einzigen Schaufel erfassen. Für $\mathfrak{z}$ Schaufeln haben wir bei der Drehschnelle ω

$$\Gamma_{s_3} = \frac{\mathfrak{z} \cdot \omega}{\omega_E} \cdot 2\,\pi\,R \cdot w_{b_3}.$$

21. Der Zirkulationsanteil der Verdrängungsströmung bei Uebergang zu unendlicher Schaufelzahl. Für $\mathfrak{z} \to \infty$ wird $w_{b_3} \to 0$ und Γ_{s_3} nimmt einen unbestimmten Wert an. Da wir bei Veränderung der Schaufelzahl das Ueberdeckungsverhältnis konstant gehalten haben, so werden bei Uebergang zu unendlicher Schaufelzahl die einzelnen Schaufeln der Pumpe unendlich klein. Die Abbildung dieses unendlich-zahligen Kreisgitters auf eine einzelne Schaufel ist die gleiche wie die einer endlich-zahligen, da diese von der Schaufelzahl unabhängig ist. Die Abbildung auf das Gitter ist deshalb auch die gleiche. Um aber auch die Zirkulatlon für alle Schaufeln zu bekommen, ist es notwendig, das $\mathfrak{z}$-fache der Normalkomponenten zu übertragen. Es war

$$\psi_y = \omega/2 \cdot e^{\frac{2x}{3}}.$$

Damit ergibt sich das $\mathfrak{z}$-fache der Normalkomponenten

$$\mathfrak{z} \cdot c_n = \cos\alpha \cdot \mathfrak{z} \cdot \frac{\partial\,\psi_y}{\partial\,x} = \cos\alpha \cdot \omega \cdot e^{\frac{2x}{3}},$$

für $\mathfrak{z} \to \infty$ erhält man somit

$$\lim_{\mathfrak{z} \to \infty} \mathfrak{z} \cdot c_n = \cos\alpha \cdot \omega.$$

Das ist aber das gleiche Ergebnis, wie wir es mit dem Eintrittsdrall $\Gamma_i = 2\,\pi\,\omega\,r_b^2$ erhalten hätten. Die zugehörige Schaufelzirkulation ist also, da $r_b = 1$ angenommen wird und $\Gamma_{i_E} = \omega_E \cdot r_b^2$ ist

$$\lim_{\mathfrak{z} \to \infty} \Gamma_{s_3} = \frac{2\,\pi\,\omega}{\omega_E}\, 2\,\pi\,R \cdot w_{b_2}.$$

Für $\mathfrak{z} \to \infty$ wird also

$$\lim \mathfrak{z}\, w_{b_3} = 2\,\pi\, w_{b_2}, \qquad \lim \mathfrak{z}\, w_{a_3} = 2\,\pi\, w_{a_2}.$$

22. Die Bedingungsgleichung für glatten Eintritt. Damit auch an der Eintrittskante der Schaufel die Geschwindigkeit endlich bleibt, ist es notwendig, daß die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit am Bildkreis Null ist. Als Bedingung für den glatten Eintritt gilt also die Gleichung

$$(w_{a_1} - w_{b_1}) \cdot \frac{Q}{Q_E} + (w_{a_2} - w_{b_2}) \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i_E}} + \mathfrak{z}\,(w_{a_3} - w_{b_3}) \frac{\omega}{\omega_E} = 0.$$

Wegen des üblichen Fehlens eines Eintrittsleitapparates erhält man mit $\Gamma_i = 0$ als Bedingung glatten Eintritts für Radialpumpen

$$\frac{w_{a_1} - w_{b_1}}{\mathfrak{z}\,(w_{a_3} - w_{b_3})} = \frac{\omega/\omega_E}{Q\,Q_E}$$

und für $\mathfrak{z} \to \infty$

$$\frac{w_{a_1} - w_{b_1}}{2\,\pi\,(w_{a_2} - w_{b_2})} = \frac{\omega\;\omega_E}{Q/Q_E}.$$

Der Index E soll die Einheitsgrößen bezeichnen. Das Verhältnis von Drehzahl zur Liefermenge ist damit also für die besten Pumpenläufer-Wirkungsgrade gegeben; doch ist der günstigste Betriebszustand einer Pumpe auch noch von den Verhältnissen des etwaigen Austrittsleitapparates, der Spirale und des Diffusors abhängig.

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen für wirbelfreien Eintritt kann nach der am Anfang angegebenen Gl. (4) die Leistungsaufnahme berechnet werden.

23. Vergleich mit der nach der Eulerschen Turbinentheorie zu errechnenden Leistung. Die Eulersche Turbinentheorie geht von der Anschauung aus, daß alle Stromlinien beim Ein- und Austritt jeweils gleiche Neigungen gegen den Umfang besitzen, also beim Eintritt radiale oder der Wirkung eines Leitapparates entsprechende Richtung besitzen, beim Austritt aber die der Schaufel. Während also das Γ_i das gleiche bleibt, wird $\Gamma_{s_{\text{Euler}}}$ zu

$$\Gamma_{s_{\text{Euler}}} = -2\pi r_b^2 \omega + Q \cot \beta_b \text{ [1]}$$

angenommen. Diese Zirkulation ist größer als die nach der Potentialtheorie zu errechnende.

Die Formel von Euler ist zu gebrauchen, wenn man an Stelle von β, dem Schaufelwinkel, einen mittleren wirksamen Austrittswinkel $\beta' < \beta$ einführen würde. Die nach Euler zu berechnende Leistung ist insbesondere für kleine Schaufelzahlen zu groß, und wird bei endlichem Ueberdeckungsverhältnis $\left(\frac{r_a}{r_b} \to 1\right)$ selbst für ∞-viele Schaufeln nicht ganz erreicht.

Weiter ergibt sich, daß die sich nach der Eulerschen Annahme für eine bestimmte Liefermenge ergebende Drehzahl wesentlich größer ist als die nach der Zirkulationstheorie zu berechnende. Man berücksichtigt diese Unterschiede bei der Konstruktion durch eine sogenannte Winkelübertreibung [2]).

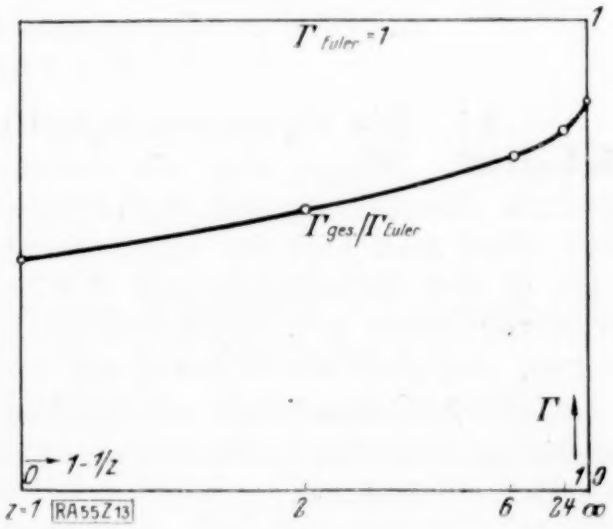


Abb. 13.

Das Verhältnis der Leistungsaufnahme zu der nach Euler berechneten ist für das gewählte Beispiel in Abb. 13 aufgetragen. Hierbei ist glatter Eintritt und Austritt und Fehlen eines Eintrittsdralles vorausgesetzt, ferner daß alle Pumpen durch die konforme Abbildung $z' = z^n$ in einander überführt werden können, wobei also insbesondere das Ueberdeckungsverhältnis konstant bleibt. Wenn man aber die Schaufelzahl unter Beibehaltung ihrer Größe und Form verändert, wobei dann auch das Ueberdeckungsverhältnis sich ändert, so erhält man mit Annäherung an die unendliche Schaufelzahl, da nun das Wasser so fließen muß, wie es die Eulersche Theorie annimmt, natürlich auch die nach Euler zu berechnende Leistungsaufnahme.

Für unsere Variation unter Beibehaltung des Ueberdeckungsverhältnisses wird

$$\frac{L_{id}}{L_{\text{Euler}}} = \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s_{\text{Euler}}}} = \frac{R}{r_b} \cdot \frac{w_{b1} - w_{b3}\dfrac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a3} - w_{b3}}}{\dfrac{Q_E}{r_b} \cdot \dfrac{\cot \beta}{2\pi} - \dfrac{\omega_E r_b}{\delta} \cdot \dfrac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a3} - w_{b3}}}$$

und für den Uebergang zu unendlicher Schaufelzahl

$$\lim_{\delta \to \infty} \frac{L_{id}}{L_{\text{Euler}}} = \lim_{\delta \to \infty} \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s_{\text{Euler}}}} = \frac{w_{b1} - w_{b2}\dfrac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a2} - w_{b2}}}{\dfrac{Q_E}{r_b}\dfrac{\cot \beta}{2\pi} - \dfrac{\omega_E \cdot r_b}{2\pi} \cdot \dfrac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a2} - w_{b2}}}.$$

Hierbei ist nun zu beachten, daß wir unsere Betrachtungen so durchführten, daß unabhängig von der Ausgangsschaufelzahl das durch konforme Abbildung gewonnene gerade

---

[1]) Die Dimension von Q ist hierin $\frac{\text{m}^3/\text{sec}}{\text{m}}$, also Durchflußmenge auf die axiale Abmessung der Pumpe bezogen.

[2]) Dieser Ausdruck wurde von Professor Föttinger in die Turbinentheorie eingeführt. (Z. F. M. 1912, S. 233 ff.)

Gitter immer das gleiche war. Das war aber nur möglich durch die Wahl von r_b als Längeneinheit, also auch der für R. Es ist also in diesen Formeln $Q_E = 1$, $\omega_E = 1$; $r_b = 1$ zu setzen:

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s\,\text{Euler}}} = \mathfrak{z} \cdot R \cdot \frac{w_{b1}\, w_{a3} - w_{a1}\, w_{b3}}{\mathfrak{z}\,\frac{\cot\beta}{2\,\pi}\,(w_{a3} - w_{b3}) - (w_{a1} - w_{b1})}$$

$$\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s\,\text{Euler}}} = 2\,\pi\,R\,\frac{w_{b1}\, w_{a2} - w_{a1}\, w_{b2}}{\cot\beta\,(w_{a2} - w_{b2}) - (w_{a1} - w_{b1})}\,.$$

Nach der Annahme von Euler ergibt sich als Bedingung für den wirbelfreien Eintritt für $\Gamma_i = 0$

$$\frac{\omega_{\text{Euler}}}{Q} = \frac{\cot\beta_a}{2\,\pi\,r_a^2}\,,$$

somit ergibt sich nach der oben errechneten wirklichen Bedingung $\frac{\omega/\omega_E}{Q/Q_E}$ für wirbelfreien Eintritt bei gleicher Fördermenge

$$\frac{\omega}{\omega_{\text{Euler}}} = \frac{\omega_E}{Q_E} \cdot \frac{w_{a1} - w_{b1}}{\mathfrak{z}\,(w_{a3} - w_{b3})} \cdot \frac{2\,\pi\,r_a^2}{\cot\beta_a}$$

und beim Uebergang zu unendlicher Schaufelzahl bei konstantem Ueberdeckungsverhältnis

$$\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \frac{\omega}{\omega_{\text{Euler}}} = \frac{\omega_E}{Q_E} \cdot \frac{w_{a1} - w_{b1}}{\cot\beta_a\,(w_{a2} - w_{b2})}\,.$$

Auch dieser Wert wird im allgemeinen nicht 1 [1]).

E. Die Strömungsverhältnisse und die Berücksichtigung der endlichen Schaufeldicke.

24. Die Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche der sehr dünnen Schaufel. Wenn man die Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche der Schaufel zwecks Beurteilung der strömungsphysikalischen Vorgänge an der Schaufel zu ermitteln hat, wird man sich im allgemeinen auf den Hauptbetriebszustand beschränken, man wird also in der Berechnung ein Wertetripel Q, Γ_i, ω zugrunde legen, das wirbelfreien Eintritt zur Folge hat. Wir wollen deshalb auch hier einen Hauptbetriebszustand zugrunde legen, obgleich die Behandlung anderer Zustände ganz ähnlich ist.

Wir hatten oben das Strömungspotential auf der Schaufeloberfläche für die reine Zirkulationsströmung bestimmt. Durch Differenziation erhalten wir die Geschwindigkeiten an der Oberfläche:

$$c_{s\gamma} = \frac{\partial\,\varphi_\gamma}{\partial\,s}\,.$$

---

[1]) Nur wenn der Schaufeleintritts- dem -austrittswinkel gleich wird, wird

$$\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \frac{\omega}{\omega_{\text{Euler}}} \to 1\,.$$

Da sich nämlich $\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s\,\text{Euler}}} \neq 0$ ergibt, andererseits aber für $\frac{r_a}{r_b} \to 1$ für gleichen Eintritts- (β_a) und Austrittswinkel (β_b) bei der Eulerschen Annahme keine Leistungsaufnahme ($\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \Gamma_{s\,\text{Euler}} \to 0$) ergeben kann, da keine Ablenkung der Strömung erfolgt, so muß auch $\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \Gamma_{s\,\text{Euler}} \to 0$ sein. Weiter folgt, daß

$$\frac{w_{a1}}{w_{a2}} = \frac{w_{b1}}{w_{b2}} = \frac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a2} - w_{b2}} = \cot\beta$$

und somit $\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \frac{\omega}{\omega_E} \to 1$. Weiter zeigt sich in diesem Falle, da $\lim_{\mathfrak{z}\to\infty} \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s\,\text{Euler}}} = 2\,\pi\,R\,w_{b2}\,\frac{\frac{w_{b1}}{w_{b2}} - \frac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a2} - w_{b2}}}{\cot\beta - \frac{w_{a1} - w_{b1}}{w_{a2} - w_{b2}}}$

und da der letzte Faktor hierfür den Grenzwert 1 annimmt

$$\lim_{\substack{\mathfrak{z}\to\infty \\ \beta_a \to \beta_b}} \frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s\,\text{Euler}}} = 2\,\pi\,R\,w_{b2}\,.$$

Die entsprechenden Geschwindigkeiten am Bildkreis sind bekannt, und zwar:

$$c_{k\gamma} = \frac{1}{R} = \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial k}.$$

Hieraus ergibt sich $\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{c_{s\gamma}}{c_{k\gamma}}$. Für andere Strömungsgeschwindigkeiten gilt

$$c_s = c_k \cdot \frac{\partial k}{\partial s} = c_k \cdot \frac{c_{s\gamma}}{c_{k\gamma}}.$$

Wir ermitteln daher zunächst (Abb. 12)

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{c_{s\gamma}}{c_{k\gamma}} = R \cdot \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial s}.$$

Hierbei ist darauf zu achten, ob s ein Punkt der Druck- oder Saugseite ist. Die Werte sind nämlich unten und oben verschieden.

Die Werte für die Durchfluß- und Eintrittsdrallströmung am Kreis sind sehr einfach zu bekommen. Der Anteil der absoluten Verdrängungsströmung ist aus dem angegebenen Integral zu ermitteln:

$$c_{k_3} = \frac{1}{4 R \pi} \int_0^\pi \frac{M(k) - M(\varkappa)}{\sin^2 \Theta} d\Theta.$$

Diese Geschwindigkeitsanteile sind zu den aus der Schaufelzirkulation resultierenden hinzuzufügen und ihre Summe mit dem ermittelten $\frac{\partial k}{\partial s}$ zu multiplizieren.

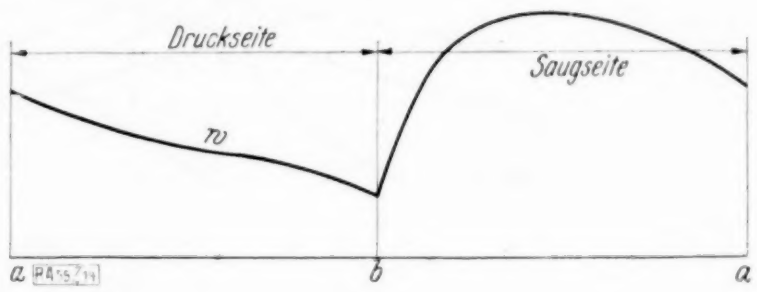


Abb. 14.

Damit hat man aber nur den Anteil der Absolutströmung an den Tangentialkomponenten der Geschwindigkeiten an der Schaufel. Der Anteil der Rotation

$$c_{s_3} = r \cdot \omega \cdot \sin \alpha$$

ist noch hinzuzufügen, wenn man die Relativgeschwindigkeit (Abb. 14) erhalten will. Hieraus erhält man auch die Druckverteilung auf Druck- und Saugseite.

25. Bemerkungen zur Wahl des Schaufelskeletts als Ersatz der Schaufel endlicher Dicke. Will man durch die Annahme eines geeigneten Quellsystems auf dem Schaufelskelett die endliche Dicke einer gegebenen Schaufelform, insbesondere für den Hauptbetriebszustand berücksichtigen, so sieht man leicht ein, daß der Abstand des Rückgrates von der Druck- und Saugseite der Schaufel sich ungefähr umgekehrt verhält, wie die dem zugrunde gelegten Betriebszustand entsprechenden Relativgeschwindigkeiten. Bei Annahme eines Quellsystems auf dem Schaufelskelett fließt nämlich an der gleichen Stelle nach der Saug- und Druckseite nahezu gleichviel Flüssigkeit ab. Auf der Saugseite ist aber die »Anströmgeschwindigkeit« viel größer als auf der Druckseite. Der Einfluß des Quellsystems ist also nach der Saugseite zu kleiner als nach der Druckseite und die Quellströmung bläht somit das Profil nach der Saugseite zu weniger als nach der Druckseite zu auf. Man muß also für den Ersatz der Schaufeln durch ihr Rückgrat die Relativgeschwindigkeit im voraus abschätzen.

26. Der Einfluß der endlichen Dicke. Für den Fall tangentialen Zu- und Abströmens kann man durch Annahme eines geeigneten Quell-Senkensystems auf dem Schaufelrückgrat eine endliche dicke Schaufel erhalten. Aus dem Ein- und Austrittspunkt werden nunmehr Staupunkte. Es wird also weder Lage noch Leistungsaufnahme eines Hauptbetriebszustandes durch Verdickung der Schaufel verändert, wenn diese Verdickung durch Quellen auf dem Schaufelrückgrat erzeugt werden kann. Die Verdickung hat nur zusätzliche Geschwindigkeiten auf der neuen Schaufeloberfläche zur Folge, wirkt also bezüglich Ablösungs- und Kavitationsgefahr nachteilig.

Die Ermittlung des zu einer gegebenen Schaufel gehörigen Quellsystems auf dem Schaufelrückgrat führt auf eine Integralgleichung erster Art. Man ersieht sofort, daß man mit Hilfe einer solchen Quellverteilung nur die Druck- o d e r die Saugseite exakt darstellen kann. Die andere Seite muß sich durch die richtige Wahl des Schaufelrückgrats allein

ergeben. Voraussetzung bleibt dabei, daß eine Lösung, d. h. Rankinesche Verteilung von »Zentral«quellen überhaupt existiert. Damit sie existiert, muß die Schaufelform gewissen Bedingungen genügen, von denen die einschränkendste ist, daß die Schaufelform mit Ausnahme der Ein- und Austrittskante keine weiteren Ecken besitzt, wie sie manchmal aus Herstellungsrücksichten gewählt werden. Damit auch auf solche Formen das angegebene Verfahren angewandt werden kann, ist eine Abrundung dieser an sich schon stumpfen Kanten vorzunehmen. Ihr Einfluß selbst kann oft vernachlässigt werden.

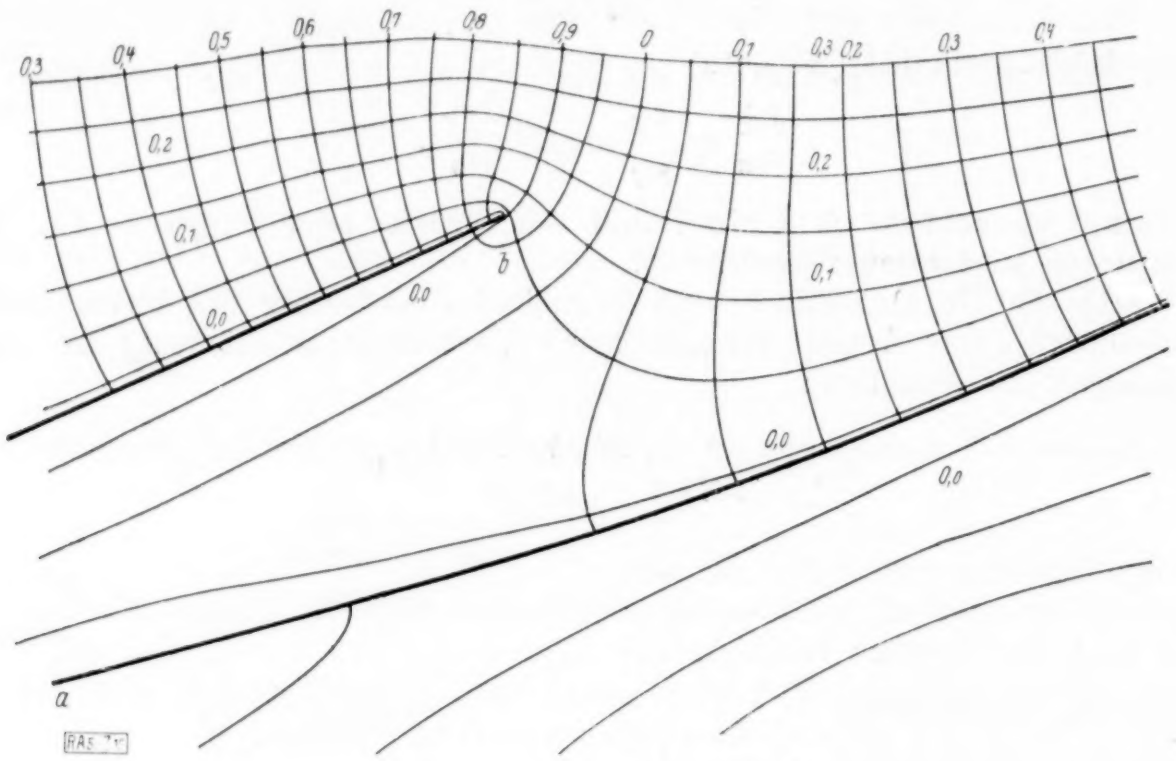


Abb. 15.

Die Aenderung der Rankineschen Belegung gestattet nun eine Variation der Schaufeln der Dicke und Zuschärfung nach, ein Vorteil, der bei der direkten Behandlung der gegebenen Form mit Hilfe von Oberflächenbelegungen verloren gegangen wäre. Zu einer solchen Behandlung muß man allerdings bei willkürlichen Formen, bei denen eine Behandlung nach der Rankineschen Methode versagt u. U., zur genauen Darstellung greifen, doch ist hiermit eine viel größere Arbeit verbunden.

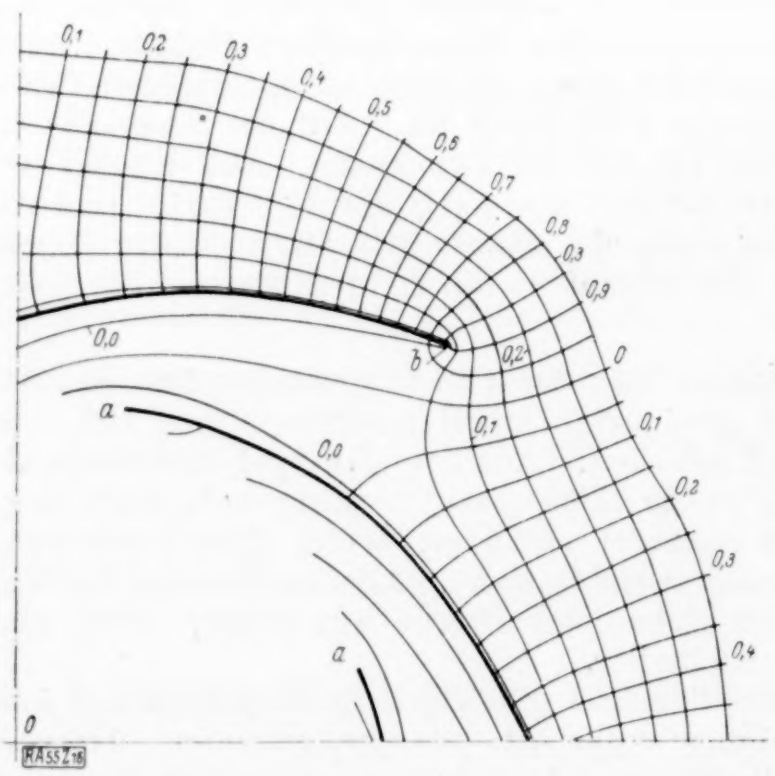


Abb. 16.

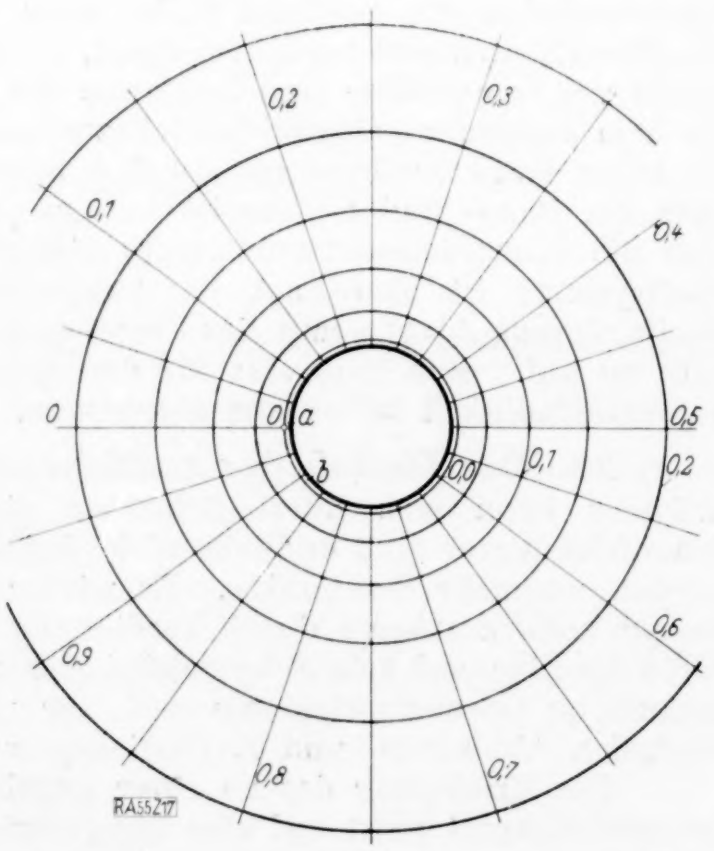


Abb. 17.

Die Lösung der die Rankinesche Belegung bestimmenden Integralgleichung läßt sich mit Hilfe eines Verfahrens, das einem in der Zeitschr. f techn. Physik 1928, Heft 1, von mir angegebenen Verfahren ähnlich ist, und dessen Brauchbarkeit inzwischen genügend erprobt wurde, durchführen. Eine Durchführung selbst führt hier zu weit, ebenso die Beschreibung eines Verfahrens zur Verbesserung einer gegebenen Schaufel insbesondere der Eintrittszuschärfung.

27. Bemerkung zur Ermittlung der vollständigen Strömungsbilder.[1]) Obwohl die Strömungsbilder für den Wert einer Schaufel nicht mehr aussagen können als die schon ermittelte Geschwindigkeitsverteilung und Leistungsaufnahme, da hierfür nur die Vorgänge in unmittelbarer Nähe der Oberfläche maßgebend sind, so haben sie doch den Wert, das Vorstellungsvermögen des Ingenieurs erheblich zu stärken.

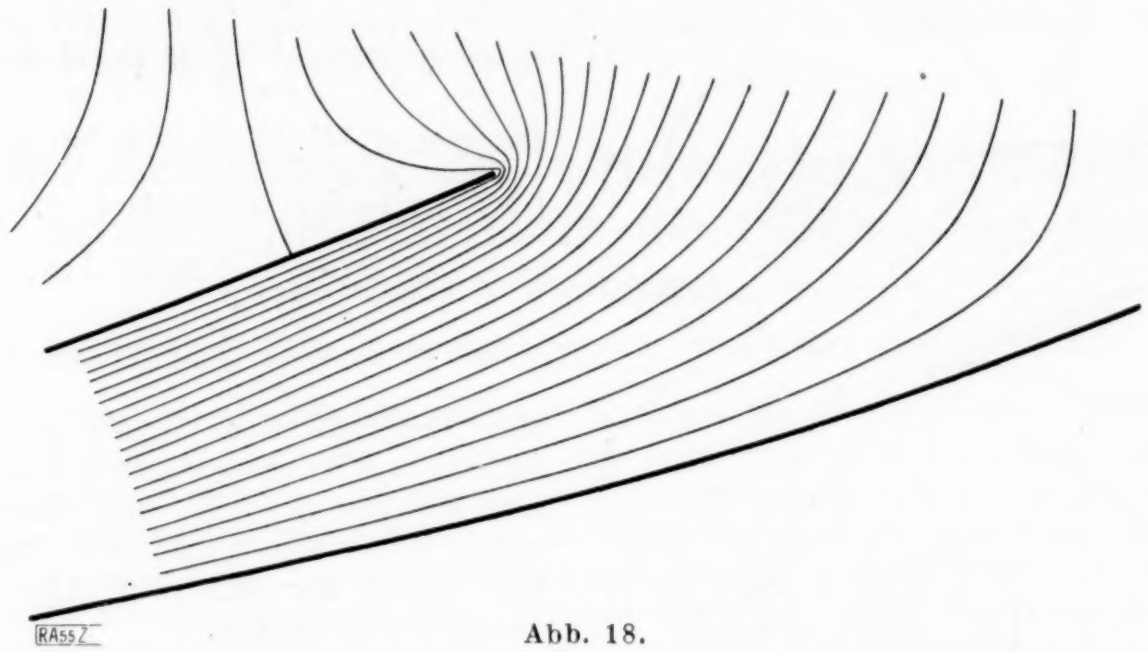


Abb. 18.

Zu ihrer Konstruktion braucht man im wesentlichen nur das Feld der Schaufelzirkulationsströmung (Abb. 15 u. 16). Man erhält es durch Ermittlung der Stromfunktion und des Strömungspotentials an den einzelnen Punkten des Feldes durch Integration über die Zirkulation bedingende Wirbelbelegung und die entsprechende Interpolation. Durch

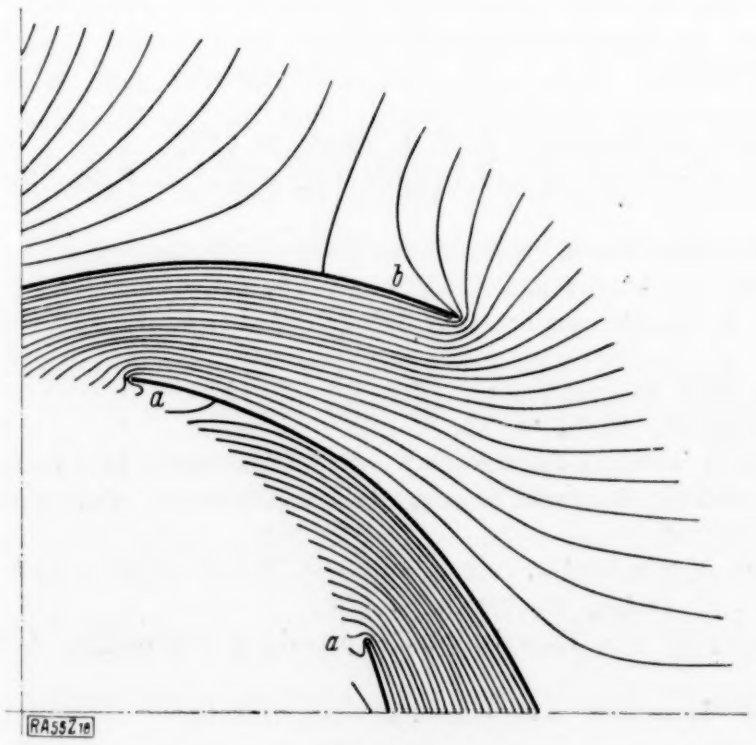


Abb. 19.

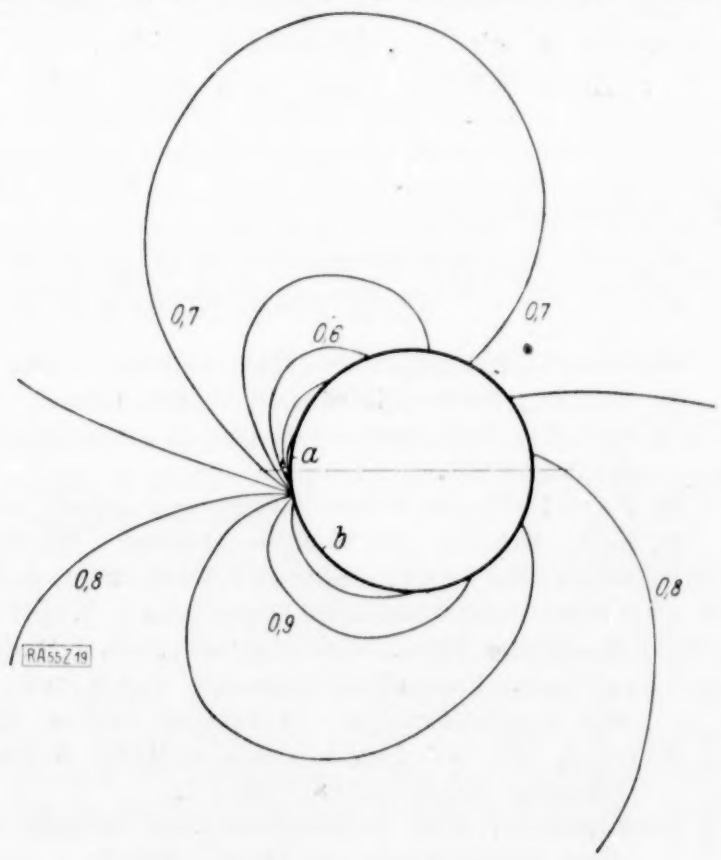


Abb. 20.

[1]) Die Abbildungen 2, 3, 8 bis 21 sind Ergebnisse der Anwendung dieser Arbeit auf das in Abb. 1 dargestellte Beispiel. Die Durchführung dieses Beispiels geschah gemeinsam mit Hrn. Dipl.-Ing. D. Stöfen, dem ich hier für seine wertvolle Mitarbeit danken möchte.

Aufzeichnen der entsprechenden Strömung um den Bildkreis Abb. 17 erhält man die punktweise Zuordnung der beiden Felder.

In der Kreisebene lassen sich nun ohne weiteres die Durchfluß- und Eintrittsdrallströmung zeichnen. Diese überträgt man dann mit Hilfe der punktweisen Zuordnung in die Schaufelebene (Abb. 18 und 19).

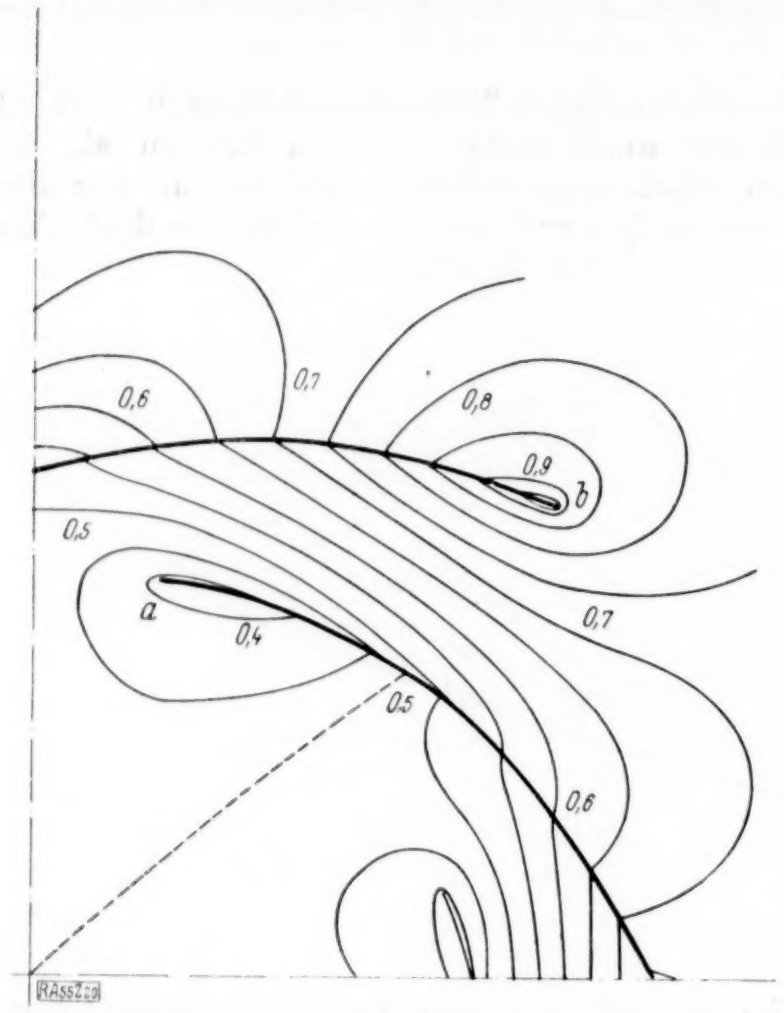


Abb. 21.

Die der absoluten Verdrängungsströmung entsprechende Strömung am Kreis (Abb. 20) erhält man durch die entsprechenden Integrale über die Quellbelegung der Kreiskontur:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{2\pi}\oint M'(k)\ln r(Pk)\,dk\,,$$

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi}\oint M'(k)\,\Theta(Pk)\,dk\,.$$

Da nun $\oint M'(k)\,dk = 0$ ist, so erhält man nach partieller Integration

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int M(k)\,d\ln r(Pk)\,,$$

$$\psi(P) = -\frac{1}{2\pi}\int M(k)\,d\,\Theta(Pk)\,.$$

Man ermittelt diese Werte zweckmäßig für Punkte auf konzentrischen Kreisen, da für alle Punkte $(k - K)$ auf einen konzentrischen Kreis $d\ln r$ und $d\Theta$ das gleiche ist. Die Werte für andere Punkte erhält man durch Interpolation.

Die ψ-Werte auf dem Kreis sind gegeben, die φ-Werte ermittelt man für die Kreiskontur aus den schon ermittelten c_{k3} Werten durch Integration. Da für die anderen Punkte $p \neq k$, kann man unbesorgt $d\ln r$ statt dr/r setzen, da man ja hierbei keine unendlichen Integranden bekommt. Diese Verdrängungsströmung überträgt man ebenfalls in die Schaufelebene (Abb. 21).

Zum Schluß kann man auch noch die Relativströmung ermitteln. 55

Literatur.

Turbinentheorie.

Prašil, Die Bestimmung der Kranzprofile und Schaufelformen. S. B. Z. 1906, S. 278.

Föttinger, Ueber die physikalischen Grundlagen der Turbinen und Propellerwirkung. Z. F. M. 1912, S. 233 ff.

Kucharski, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. Oldenbourg 1918.

E. König, Potentialströmung durch Gitter. Diese Zeitschr. Bd. 2 (1922), S. 422.

H. Oertli, Untersuchungen der Wasserströmung durch ein rotierendes Zellenkreiselrad. Dissertation Zürich 1923.

D. Pavel, Ebene Potentialströmung durch Gitter und Kreiselräder. Diss. Zürich 1925.

B. Eck, Beitrag zur Turbinentheorie. Werft, Reederei, Hafen 1925.

Spannhake, Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern. Hydraulische Probleme S. 180 ff. (1926), Festschrift zur Jahrhundertfeier der T. H. Karlsruhe 1925, diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), Heft 6.

Sörensen, Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), Heft 2 und Verhandlungen des zweiten Intern. Kongr. f. techn. Mechanik S. 470.

Schulz, Das Förderverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln, diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), Heft 1.

Busemann, Das Förderverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch spiraligen Schaufeln, diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), Heft 5.

Quell-Senken Methode.

Rankine, On Plane Water-Lines. Phil. Trans. 1863 und Proc Roy. Soc. Vol. 13. — Elementary Demonstrations of principles relating to Stream Lines, The Engineer, 16. Okt. 1868. — On the Mathematical Theorie of Stream-lines. Phil. Trans. 1871.

Taylor, On Ship — shaped Stream Forms, Naval Architects 1894.
Fuhrmann, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Jb. d. Motorluftschiffahrt — Stud. Ges., 1912, Diss. 1912.
Kármán, Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern, Abh. d. aerodyn. Inst. d. tech. Hochschule Aachen 1927, Heft 6.
Föttinger: Kavitation und Korrosion, Hydraulische Probleme 1926. — Fortschritte der Strömungslehre im Maschinenbau und Schiffbau. Jb. der Schiffbautechn. Ges. 1924. — Ueber Maschinen zur Integration von Wirbel- und Quellfunktionen (Vektorintegratoren) Proc. 1. intern. Congr. f. applied. mech. Delft 1924. — Die Entwicklung der Vektorintegratoren zur maschinellen Lösung von Potential- und Wirbelproblemen, Zeitschr. f. techn. Physik 1928, Nr. 1.
Weinig, Ueber schnell konvergierende graphische Lösungen von Strömungsproblemen durch Integralgleichungen, Zeitschr. f. techn. Physik 1928, Nr. 1.

Potentialtheorie.

Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen 1887.
Plemeli, Potentialtheoretische Untersuchungen 1911.

Über die Berechnung des wellenbildenden Widerstandes von Schiffen, insbesondere die Hognersche Formel.

Von **GEORG WEINBLUM** in Berlin.

Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau.

Die Berechnung des Schiffswiderstandes ist durch William Froude als Begründer der Schlepptechnik bis auf den heutigen Tag richtunggebend beeinflußt. Erfassung des Reibungswiderstandes[1]) auf Grund experimentell gewonnener empirischer Formeln, Feststellung des Formwiderstandes durch den Modellversuch kennzeichnen das Verfahren, welches seit 60 Jahren im Schiffbau angewandt wird und darüber hinaus das Versuchswesen im Luftfahrzeugbau nachhaltig angeregt hat. Der Weg, den Froude beschritten hat, ist praktisch begründet in der Tatsache, daß der Wellenwiderstand von einer sehr großen Anzahl von selbst z. Zt. nicht sicher zu übersehenden Faktoren abhängt — theoretische Lösungen waren damals unbekannt — während der Reibungswiderstand durch Länge, Geschwindigkeit und Rauhigkeit empirisch genügend genau festgelegt zu sein schien. Vom Standpunkt der Mechanik liegen aber die Verhältnisse so, daß die Wellenbewegung, auf welche die Vorstellung von der idealen Flüssigkeit weitgehend zutrifft, der prinzipiell einfachere Fall ist, und der Reibungswiderstand theoretisch erst ungenügend erfaßt werden kann, d. h. das Vorgehen von Froude widerspricht dem sonst in der Hydrodynamik üblichen, welches an das mechanische Modell der idealen Flüssigkeit später Korrekturen zur Berücksichtigung der Zähigkeit anzubringen versucht. Trotzdem wird das Versuchswesen aus den angeführten Gründen bei Beantwortung praktischer Fragestellungen im großen ganzen bei dem Froudeschen Schema bleiben; daneben sieht sich jedoch die Schiffstheorie gezwungen, auf Lösungen des Wellenwiderstandes zurückzugreifen, wobei in erster Linie zwei Gesichtspunkte maßgebend sind:

1. den Ablösungswiderstand, welcher bei Froude mit dem Wellenwiderstand in einen Topf zusammengeworfen wird, hiervon abzutrennen und
2. Gesetzmäßigkeiten im Wellenwiderstand aufzufinden, welche sich aus dem sehr umfangreichen, aber nicht genügend systematischen empirischen Material bisher nur in beschränktem Maße folgern lassen.

Dieser zweite, hydrodynamische Weg — die Druckpunkttheorie — führt über Arbeiten Lord Kelvins zu denen von Havelock und Hogner; daneben ragt als einsamer Höhepunkt die Michellsche Veröffentlichung[2]) über den Wellenwiderstand hervor.

Die vorliegende Arbeit stellt sich als Aufgabe, in Fortsetzung früherer Untersuchungen[3]) die vorhandenen Ergebnisse der Hydrodynamik für die Schiffstheorie nutzbar zu machen. Sie zerfällt in drei Teile: zuerst wird der Wellenwiderstand (im nachfolgenden einfach mit »Widerstand« bezeichnet) in Fortführung Michellscher Gedankengänge ange-

[1]) Im Schiffbau wird die Differenz Gesamtwiderstand — Reibungswiderstand als Form- oder Restwiderstand bezeichnet; dieser enthält nach der üblichen Terminologie sowohl den Wellen- wie den Ablösungswiderstand.

[2]) Philosophical Mag. 1898.

[3]) Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1930.

setzt, sodann die Hognersche Formel kurz wiedergegeben und zum Schluß werden numerische Auswertungen, ein Vergleich mit Versuchsergebnissen und Anwendungen auf Probleme der Gleitvorgänge[1]) gebracht.

Die Voraussetzungen, von denen wir ausgehen, sind: ideale Flüssigkeit, Wirbelfreiheit (so daß wir ein Geschwindigkeitspotential ansetzen können) und kleine Neigungen der Wellenoberfläche zur Horizontalen. Es sei zunächst zwischen reinen Deplacementschiffen, deren Gewicht nur durch den statischen Auftrieb nach dem archimedischen Prinzip ausgeglichen wird, und Gleitschiffen unterschieden, bei welchen der dynamische Auftrieb überwiegt. Die ersteren haben als Grenze ein scharfes kielförmiges Gebilde, für welches die Lösung Michells gilt, die zweiten ein flaches Brett, auf welches die Hognersche Widerstandsformel angewandt werden kann. Die beiden Verfahren sind also je an einer Grenze brauchbar. Wir behandeln zunächst den ersten Grenzfall.

I. Ansätze für das Deplacementschiff.

Wir setzen für die Deplacementschiffe die Differentialgleichungen und Randbedingungen in der Michellschen Form an, wobei wir uns jedoch von den Bedingungen kleiner Schiffswinkel und des ebenen Kiels möglichst frei zu machen suchen. Wir begnügen uns mit dem praktisch nur in Frage kommenden Fall der stationären Bewegung, wobei das Schiff mit der Geschwindigkeit v_0 angeströmt wird. Das Koordinatensystem sei wie folgt gewählt (Abb. 1):

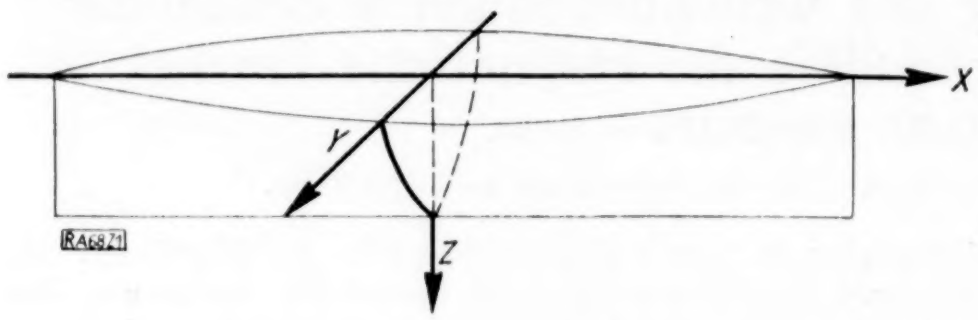


Abb. 1.

Das Geschwindigkeitspotential führen wir, um das Ueberwiegen der Schiffsgeschwindigkeit über die Wassergeschwindigkeit explizit zum Ausdruck zu bringen, nach Michell in der Form

$$\Phi = -v_0 x + \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ein. Die kinematische Oberflächenbedingung, welche uns den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit in der Tiefgangsrichtung für die Oberflächenwelle ζ_0 mit der Wassergeschwindigkeit gibt, lautet:

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = v \cdot \frac{\partial \zeta_0}{\partial x}, \qquad v = v(x, y, z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Druckgleichung nimmt die Form an:

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{v^2}{2} - g\,\zeta_0 = \text{const} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Für den Kiel, dessen Gleichung

$$z_0 = \chi(z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

sei, lautet die Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

desgleichen an den Schiffswänden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)^2),$$

wenn $\eta = f(x, z)$ die Gleichung der Schiffsoberfläche bedeutet, welche fast immer mit hinreichender Genauigkeit durch ganz rationelle Funktionen ausgedrückt werden kann. Die Potentialfunktion genügt natürlich der Kontinuitätsbedingung

$$\Delta \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Dieses schwierige Gleichungssystem, welches durch die Annahme kleiner Winkel von Michell linearisiert worden ist, gibt uns noch keineswegs den Vorgang bei wirklichen Schiffen richtig wieder, weil der Trimm ε und die Absenkung t_0, welche insbe-

[1]) Unter »Gleitvorgang« verstehen wir das Schwimmen von Fahrzeugen infolge dynamischen Auftriebs.

[2]) Diese Gleichung enthält die Voraussetzung der üblichen Schiffsform: die z, y Komponenten von $v(x, y, z)$ müssen gegenüber der x Komponente klein sein, d. h. die Strömung erfolgt hauptsächlich nach Wasserlinien.

sondere bei höheren Geschwindigkeiten sehr wesentlich sein können, vernachlässigt werden und dann die Voraussetzungen des reinen Deplacementsschiffes nicht mehr stimmen. Die obigen Gleichungen geben den Zustand des »Zwangstrimms« wieder. In Wirklichkeit wird sich unser Schiff um eine Achse $\| Y$ drehen und eine kleine Vertikalverschiebung in der ZX-Ebene erfahren, so daß die Gleichung der Schiffsoberfläche und des Kiels die Form

$$\eta = f(x, z, \varepsilon, t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$z_0 = \chi(x, \varepsilon, t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

annimmt. Die Ausdrücke ε, t_0 sind Funktionen der Froudeschen Zahl[1]), es tritt daher, bevor wir zur Berechnung des Schiffswiderstandes für eine bestimmte Geschwindigkeit unter Berücksichtigung von ε und t_0 schreiten können, die Notwendigkeit auf, diese Ausdrücke zu bestimmen; mit anderen Worten stellt sich das Problem so dar, daß zuerst die Lage und hieraus erst der Widerstand des Schiffes gerechnet werden muß. Prinzipiell ist der Lösungsweg durch das Hamiltonsche Prinzip gegeben: die wirkliche Lage unseres Fahrzeugs wird sich aus den Gleichungen

$$\delta \int (T - V)\, dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und $\delta(T - V) = 0$ für stätionäre Bewegung finden lassen, wobei die Variation nach ε auszuführen ist, wenn wir auf den geringeren Einfluß der Absenkung t_0 verzichten wollen. Die Ausdrücke für die potentielle und die kinetische Energie sind für die Zeiteinheit anzusetzen. Die Variationsaufgabe wird selbstverständliche so große Schwierigkeiten bieten, daß mit ihrer Lösung in absehbarer Zeit nicht zu rechnen ist. Andererseits können wir aber behaupten, daß eine Lösung existieren muß, da die Gleichungen einen wirklich eintretenden physikalischen Vorgang beschreiben.

Die Linearisierung der Grundgleichungen durch Michell, welche für ein Schiff mit kleinen Neigungen der Schiffsoberfläche zur Symmetrieebene und rechteckiger Längskontur gilt, bringt die Lösung unseres Problems, für den Grenzfall scharfer Fahrzeuge mit großem Tiefgang und geringer Breiteströmung nach Wasserlinien. Sie ergibt die folgenden Gl. (12 — (14), wobei die eingeführten Vereinfachungen gleich beurteilt werden sollen. (Die Michellsche Formel findet man auf Seite 458 als Gl. (33) — (35):)

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

d. h. im Vergleich zu Gl. (2) die Einführung der konstanten Schiffsgeschwindigkeit statt der jeweilig vorhandenen Wassergeschwindigkeit; dies kann am Heck und am Bug bei ausladenden Schiffsformen einen wesentlichen Fehler vorstellen. Auch die Vereinfachung der Gl. (3) zu

$$v^2 = v_0^2 - 2 v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist an den Schiffsenden nicht unwesentlich.

Die bedenklichste Annäherung liegt jedoch in der Annahme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)^2)$$

statt Gl. (6) Abb. 2.

Die Bedingung der rechteckigen Längskontur $z_0 = h$ statt (5) erschwert die Behandlung von Schiffstypen mit stark weggeschnittenen Enden.

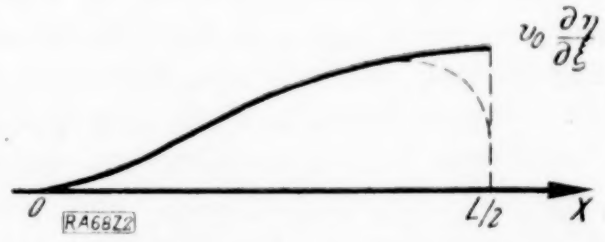


Abb. 2.

Der Geltungsbereich der Michellschen Annahmen ist Gegenstand eingehender experimenteller Untersuchungen, welche auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Horn mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft in der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, vom Verfasser durchgeführt werden[3]). Diese Versuche sollen erbringen, ob die Michellsche Theorie ausreicht, eine für die Praxis notwendige Systematik zu schaffen oder ob weitergehende Lösungen unentbehrlich sind.

---

[1]) Die Froudesche Zahl ist $f = \sqrt{\frac{v_0^2}{g L}}$, wenn mit L die Schiffslänge bezeichnet wird.

[2]) Weinig hat den Vorschlag gemacht, einen plausiblen Geschwindigkeitshodographen einzuführen, doch ist nicht zu ersehen, wie die Integrationsschwierigkeiten hiernach zu bewältigen sind.

[3]) S. a. Wigley, Trans. Inst Nav. Arch. 1926, 1927, 1930.

II. Ansätze für das Gleitschiff.

Bis hierher hatten wir vorwiegend Deplacementschiffe im Auge gehabt und die dadurch bedingten Einschränkungen untersucht. Die Grundgleichungen könnten mit einer groben Annäherung in gewissen Fällen auch für Auftriebschiffe herangezogen werden, ebenso für die Zwischenstadien, in welchen die beiden Formen ineinander übergehen, sie versagen jedoch, sobald die Annahme der Abströmung nach Wasserlinien durch die nach Schnitten zu ersetzen ist. Im extremen Fall eines Fahrzeugs mit verschwindendem Tiefgang, spez. eines Gleitschiffes, kommt man zu einer angenäherten Lösung durch die Hognersche Formel. Es bestehen hier folgende Bedingungen[1]):

Innerhalb des Schiffsbodens $S = z_0 (x, y)$ muß unsere Wellenoberfläche die Gleichung desselben annehmen:

$$\zeta_0 (x, y) = z_0 (x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

2. die Summe des Auftriebs ist gleich dem Schiffsgewicht

$$\Sigma A = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und das Auftriebsmoment gleich dem Gewichtsmoment

$$\Sigma A x = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die wirklich eintretende Lage des Fahrzeugs wird wieder eine Funktion der Froudeschen Zahl sein und könnte genau wie oben aus dem Hamiltonschen Prinzip gewonnen werden, nur daß wir hier wegen der Wichtigkeit der Anfuhrvorgänge den Ansatz in seiner allgemeinsten Form zu wählen haben:

$$\delta \int (V - T)\, dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Auch diese Lösung ist vorläufig unzugänglich, insbesondere wird die Erfüllung der Randbedingungen am Boden selbst für einen vorgegebenen Anstellwinkel außerordentliche Schwierigkeiten bereiten; wir sehen uns daher nach einem anderen mechanischen Modell um, welches den Vorgang genügend exakt wiedergibt. Aus Messungen von Sottorf[2]) ist bekannt, daß vorgeschriebenen Bodenformen in Abhängigkeit von der Froudeschen Zahl verschiedene Druckverteilungen entsprechen; da mathematische Schwierigkeiten eine Berechnung der Drücke für bestimmte Bodenformen nicht zulassen, ist man versucht, statt der Randbedingung für den Boden $z (x, y) = \zeta_0$ auf Grund von Messungen eine Druckverteilung p für den Anfangszustand vorzugeben und dann die Variation anzusetzen.

Wie weit die rechnerischen Schwierigkeiten auch hier noch bestehen, werden wir weiter unten sehen.

Mit dieser Betrachtung haben wir einen Anschluß an die Theorie der Druckpunkte gewonnen, welche über den zweiten Grenzfall — Schiff mit verschwindendem Tiefgang — einige Aufschlüsse geben wird. Eine Identität der Variationen für gegebenen Boden und Druck besteht aber nicht, es können daher durch den Ersatz im Verlauf des Bewegungsvorganges Abweichungen von unserer ursprünglichen Bodenform auftreten.

Alle uns interessierenden Vorgänge am Fahrzeug sind eindeutig definiert, wenn die Druckverteilung bekannt ist durch Summierung der Komponenten in der Fahrt. Die Schwierigkeit liegt gerade in der Auffindung der Drücke. In dieser Beziehung ist ein tieferes Eindringen in den Mechanismus des Widerstandes durch systematische Messungen am Modell, wie sie von Horn in der Versuchsanstalt Berlin veranlaßt sind, zu erwarten.

Die Theorie stellt sich wesentlich bescheidenere Aufgaben:

Die Unmöglichkeit, die Wellenbewegung für vorgegebene Formen exakt zu bestimmen, hat zum Ersatz von Widerstandskörpern durch Drucksysteme geführt, welche die Bezeichnung »forcive« tragen. Die Frage, wie die Druckverteilung, welche wir uns über ein bestimmtes Gebiet der Oberfläche angreifend denken, zustande kommt und welchen Schiffsformen bestimmte Verteilungen entsprechen, ist dabei vollkommen offen gelassen. Wir sehen, daß hiermit nur eine rohe Annäherung an praktisch vorliegende Verhältnisse gegeben ist; dementsprechend hat die Theorie in ihren Anfängen für Untersuchungen im Schiffbau wenig geleistet, bis es Havelock[3]) gelang, eine Lösung für zweidimensionale Drucksysteme und Druckgruppen mit achsensymmetrischer Verteilung

---

[1]) Wir sehen von einer Untersuchung der Gierbewegungen ab.
[2]) Werft, Reederei, Hafen 1929.
[3]) Proceedings of the Royal Society London 1918.

zu finden. Einen gewissen Abschluß haben diese Arbeiten durch Hogner[1]) erfahren, der nachgewiesen hat, daß selbst für eine beliebige Druckanordnung auf der Oberfläche der Widerstand sich verhältnismäßig einfach rechnen läßt.

Wir wollen uns zunächst mit einer kurzen Wiedergabe der physikalischen Voraussetzungen und des Geltungsbereiches der Hognerschen Formel befassen, wobei vorangestellt werden soll, daß für die Zwecke der Schiffstheorie nicht so sehr das Wellenbild, als der Widerstand entscheidend ist — eine glückliche Problemstellung, da es sich bei allen Rechnungen zeigt, daß der Widerstand als eine verhältnismäßig einfache Aufgabe im Vergleich zur Oberflächenform zu betrachten ist.

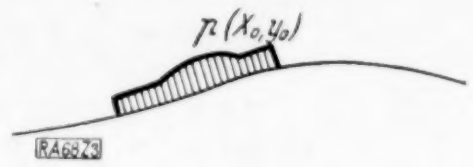


Abb. 3.

Unter der Annahme idealer Flüssigkeit und geringer Wellenhöhe im Vergleich zur Länge wird die gleichförmige Bewegung eines Drucksystems p untersucht, welches sich in Richtung der positiven X-Achse bewegen soll. Der Vorgang ist stationär, wenn wir die Beziehung

$$X = x - v_0 t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

einführen; wobei das Zusammenfallen beider Systeme für den Zeitpunkt $t = 0$ vorauszusetzen ist. Für diese Bewegung wird ein Geschwindigkeitspotential Φ angesetzt, welches der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta \Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

genügt. Die Oberflächengleichung sei $\zeta_0 = \zeta_0 (X, y)$; man erhält dann aus den Eulerschen Gleichungen

$$\zeta_0 = \frac{v_0}{g} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{z=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

$$\frac{v_0}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial X} = v_0^2 \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{z=0} + g \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Gegenüber der Michellschen Theorie ist hervorzuheben, daß eine Beschränkung hinsichtlich der Konfiguration des Drucksystems (entsprechend der Bedingung sehr kleiner Winkel zur Mitschiffsebene) nicht besteht, und wir daher versuchen können, die Hognersche Theorie unter gewissen Kautelen zur Kontrolle des Michellschen Integrals anzuwenden.

In unendlich tiefem Wasser muß die Geschwindigkeit 0 herrschen, was durch die Bedingung

$$\Phi_{z=-\infty} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (23)$$

erfüllt wird. Das Drucksystem kann durch das Fouriersche Integral dargestellt werden, wobei mit $X_0\ y_0$ die Koordinaten eines Druckpunktes bezeichnet werden sollen. Hieraus ergibt sich das Hognersche Geschwindigkeitspotential:

$$\Phi = -\frac{i v_0}{4 \pi^2 \varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} \int d\alpha\, d\beta \int_S \int p (X_0, y_0) \frac{\alpha\, e^{i [\alpha (X - X_0) + \beta (y - y_0)] + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, z}}{v_0^2 \alpha^2 - g \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d X_0\, d y_0 \quad (24).$$

Ueber die Auswertung des letzten Integrals, siehe Hogner (Dissertation), Upsala 1925. Für verschiedene Gebiete der Oberfläche werden Entwicklungen angesetzt, welche die Darstellung der Wellenform ermöglichen; nur im eigentlichen Bereich des Drucksystems sind die Schwierigkeiten noch nicht überwunden. Diese Tatsache ist vom Standpunkte des Schiffbauers bedauerlich, weil er nicht in der Lage ist, festzustellen, welche Bodenform einer bestimmten Druckverteilung entspricht. Dagegen erweist sich die Beschränkung für die Widerstandsrechnung nicht als nachteilig, weil alle der Rechnung unzugänglichen Glieder verschwinden.

Wie schon erwähnt, betrachten wir ein Drucksystem, welches nur in einem Gebiete S von 0 verschieden ist. Die Beziehung für den Widerstand ergibt sich dann einfach durch die Summation der Komponenten in der Bewegungsrichtung als

$$R = \int_S \int p (X_0, y_0) \frac{\partial \zeta_0}{\partial X} d X_0\, d y_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und die Hognersche Formel lautet:

[1]) Delfter Bericht 1924. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 1925, 1928.

$$R = \frac{g^2 P^2}{\pi \varrho v_0^6} \int_0^\infty \{G_r^2(u) + G_i^2(u)\} (u^2+1)^{3/2} du \quad . . . . . (26),$$

$$G_r(u) = \frac{1}{P} \iint_S p(X_0, y_0) \cos\left[\frac{g}{v_0^2}(X_0 + u y_0)\sqrt{u^2+1}\right] d X_0 \, d y_0 \quad . . (27),$$

$$G_i(u) = -\frac{1}{P} \iint_S p(X_0, y_0) \sin\left[\frac{g}{v_0^2}(X_0 + u y_0)\sqrt{u^2+1}\right] d X_0 \, d y_0 \quad . . (28).$$

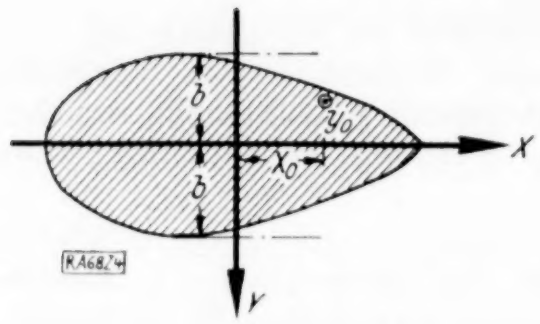


Abb. 4.

Diese Beziehungen legen wir unseren weiteren Rechnungen über den Widerstand von Gleitfahrzeugen zugrunde und führen zur Auswertung der Funktionen $\sigma_r(u)$, $\sigma_i(u)$ die Annahme ein, daß die Begrenzung des Gebietes immer symmetrisch zur X-Achse sein soll; nur dieser Fall hat praktisches Interesse, die Brauchbarkeit unserer Folgerungen leidet nicht darunter. Die Y-Achse legen wir dann zwischen die äußersten Punkte von S (Länge über alles) $\pm a$ und bezeichnen

$$\xi_0 = \frac{X_0}{a}, \qquad \varkappa_1 = \frac{a g}{v_0^2} = \frac{1}{2 f^2}, \qquad \gamma_1 = \varkappa_1 \sqrt{u^2+1},$$

$$\eta_0 = \frac{y_0}{b}, \qquad \varkappa_2 = \frac{b g}{v_0^2}, \qquad \gamma_2 = \varkappa_2 u \sqrt{u^2+1},$$

$$f = \sqrt{\frac{v^2}{2 a g}} \quad - \text{ Froudesche Zahl,}$$

um mit dimensionslosen Größen operieren zu können,

$$p = p(\xi_0, \eta_0) = p_0 \Sigma\Sigma a_{mn} \xi_0^m \eta_0^n, \qquad P = a b \iint_S p \, d\xi_0 \, d\eta_0 \quad . . . (30).$$

Bei Beschränkung auf eine symmetrische Begrenzung auch in der X-Richtung, erhalten wir sofort folgendes Resultat: zum Integral

$$G_r(u) = \frac{a b}{P} \iint_S p(\xi_0 \eta_0) \cos(\gamma_1 \xi_0 + \gamma_2 \eta_0) \, d\xi_0 \, d\eta_0 \quad . . . . (31)$$

tragen nur symmetrische (gerade) Glieder der Druckfunktionen $\Sigma\Sigma a_{mn} \xi_0^m \eta_0^n$ etwas bei, zum Ausdruck

$$G_i(u) = -\frac{a b}{P} \iint_S p(\xi_0 \eta_0) \sin(\gamma_1 \xi_0 + \gamma_2 \eta_0) \, d\xi_0 \, d\eta_0 \quad . . . . (32)$$

nur unsymmetrische, da bei symmetrischen Grenzen das Integral einer ungeraden Funktion 0 ergibt.

In der Struktur der Hognerschen Formel besteht eine weitgehende Aehnlichkeit mit dem Michellschen Integral:

$$R = c \int_{\gamma_0}^\infty (J^2 + I^2) f(\gamma) \, d\gamma \quad . . . . . (33),$$

$$J = c_1 \int_{L_1} \int_T \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \cdot e^{-\beta\zeta} \sin \gamma \xi \, d\xi \, d\zeta \quad . . . . . (34),$$

$$I = c_2 \int_L \int_T \frac{\partial \eta}{\partial \xi} e^{-\beta\zeta} \cos \gamma \xi \, d\xi \, d\zeta \quad . . . . . (35),$$

$\eta = f(\xi, \zeta)$ — Schiffsoberfläche.

Statt der Druckfunktion erscheint der Differentialquotient der Schiffsoberfläche auf; zu beachten ist, daß nach Hogner die Breiten-, nach Michell Tiefenkoordinate auftritt, wodurch die beiden Formeln als Grenzfälle gekennzeichnet sind. In beiden Fällen zeitigt eine Abweichung von der Symmetrie zusätzlichen Widerstand, da die quadratischen Glieder $G_i^2(u)$, I^2 immer größer als 0 sein müssen. Damit ist ein erster Zusammenhang

zwischen Druckverteilung und Widerstand gewonnen. Auch rechnungsmäßig besteht eine weitgehende Analogie insofern, als in beiden Integralformen Produkte der Druckfunktion bzw. der Oberflächentangenten mit einfachen Kreisfunktionen auftreten. Bei konstanten Grenzen für y und ganzen rationalen Funktionen für das Drucksystem erhalten wir die einfachen Quadraturen:

$$M_m(\gamma) = \int_0^1 t^m \sin \gamma t \, dt \quad . \quad . \quad (36), \qquad M_n'(\gamma) = \int_0^1 t^n \cos \gamma t \, dt \quad . \quad . \quad (37),$$

welche Michell-Funktionen genannt worden sind. Somit können wir für diesen wichtigsten Fall einen großen Teil der an anderer Stelle [1]) gewonnenen Rechnungsergebnisse benutzen mit dem Unterschiede. daß hier für symmetrischen Druck der cos. Typus maßgebend ist.

Als zweites Ergebnis folgt unmittelbar, daß für $v_0 = \infty$, $R = 0$, d. h. der Wellenwiderstand verschwindet.

Legen wir uns jetzt die entscheidende Frage vor, wie die Hognerschen Ergebnisse in der Schiffstheorie auf Gleitboote, Flugzeugschwimmer usw. angewandt werden können. Gegenüber dem außerordentlich verwickelten Vorgang beim Gleiten gibt uns die Theorie nur für eine bestimmte vorgeschriebene Druckverteilung den dazugehörigen Widerstand. Wir sind, wie hervorgehoben, z. Zt. nicht einmal in der Lage, die Form des Bodens, welche einem angenommenen Auftriebssystem entspricht, mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Daß für eine empirische Druckmessung der Widerstand gerechnet werden kann, ist kein praktischer Vorteil, da bei einem solchen Versuch der leicht zu bestimmende Anstellwinkel immer gemessen wird, der Wellenwiderstand daher unmittelbar bekannt ist.

Auch der Versuch, eine Widerstandskurve über das Gebiet der uns interessierenden Froudeschen Zahlen zu ermitteln, wenn für eine Geschwindigkeit v_1 die Druckverteilung $p_1(\xi_0\ \eta_0)$ bekannt ist, scheitert an Schwierigkeiten der Rechnung. Die Variation für den stationären Vorgang $\delta(T - V) = 0$ ist für die Nebenbedingungen

$$p = p_1(\xi_0, \eta_0), \qquad P = a\,b \iint_s p \, d\,\xi_0 \, d\,\eta_0, \qquad M = a^2 b \iint_s p\ \xi_0 \, d\,\xi_0 \, d\,\eta_0$$

$v_1 =$ konst. zu lösen; nun ist die X-Achse des forcive innerhalb gewisser Schranken (Abb. 5), welche durch die auftretenden Druckverteilungen gegeben sind, variabel, daher sowohl

$$T = F_1\ (p, \text{ Integralgrenze}) \quad \text{wie} \quad V = F_2\ (p, \text{ Integralgrenze}) \quad . \quad . \quad (39),$$

mithin die Schwierigkeit der Variationsaufgabe außerordentlich. Wegen der Voraussetzung einer stationären Bewegung scheiden alle Anfahrvorgänge aus.

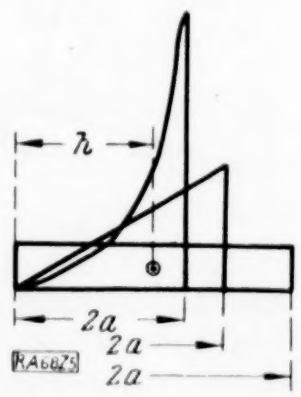


Abb. 5.

Trotz aller dieser Einschränkungen wird die systematische Forschung schon jetzt aus den hydrodynamischen Ergebnissen Nutzen ziehen können, wenn auch zur Berechnung von Einzelfällen immer der Versuch heranzuziehen sein wird. Beschränken wir uns im folgenden auf feste Grenzen, also ein unveränderliches Gebiet der Oberfläche, wählen wir einfache Druckverteilungen und einfache Konturen dieses »forcive« Gebietes, so können wir die Abhängigkeit des Widerstandes von allen diesen Größen generell feststellen. Darüber hinaus können wir versuchen, Minimalüberlegungen für Drucksysteme anzustellen, welche bei peinlicher Beachtung der einschränkenden Bedingungen von Wert sein können. Setzen wir $p = p_0 \sum\sum a_{mn}\, \xi_0^m\, \eta_0^n$, worin die a_{mn} so zu bestimmen sind, daß der Widerstand ein Minimum wird, und halten wir nach wie vor die Grenze fest, so ergibt die Ritzsche Methode als angenäherte Lösung der Variation $\delta R = 0$ die Bestimmungsgleichungen für eine gegebene Froudesche Zahl:

$$\frac{\partial R}{\partial a_{nn}} = 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad P = \text{konst.}, \quad M = \text{konst.} \quad . \quad (40).$$

Praktisch würde man die Rechnung so durchführen, daß man

$$p = p_0\, \chi(\eta_0) \sum a_m\, \xi_0^m \quad \text{oder} \quad p = p_0\, \psi(\xi_0) \sum a_n\, \eta_0^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

ansetzt, d. h. in einer Richtung eine bestimmte Verteilung annimmt und die günstigste Lösung in der anderen Richtung sucht. Man könnte das Minimumprinzip einer syste-

[1]) Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1930.

matischen Untersuchung zugrunde legen; wir beschränken uns weiterhin auf eine direkte Auswertung einiger einfacher Beispiele. Bei systematischen Versuchen wird man so vorgehen können, daß man die Zusammenhänge für Druckverteilung und Boden experimentell zu klären sucht und dann die Bodenformen in Richtung günstiger Drücke abändert.

III. Widerstände einiger einfacher Drucksysteme.

Wir untersuchen Folgerungen aus der Hognerschen Formel für untenstehende Fälle:

A. Rechteckige Druckgebiete.

a) $p = p_0 = \text{konst.}$ Abhängigkeit des Widerstandes vom Breitenverhältnis des Druckgebietes für eine Reihe von Froudeschen Zahlen. Die Annahme $p = p_0 = \text{konst.}$ entspricht nicht der Wirklichkeit, da aus den Messungen von Sottorf bekannt ist, daß bei höheren Froudeschen Zahlen die Druckverteilung fast dreieckförmig wird; sie ergibt aber eine erste Näherung.

b) $p = p_0 (1 + \xi_0)$. Einfluß einer unsymmetrischen Druckverteilung auf den Widerstand.

c) $p = p_0 (1 \pm \xi_0^2)$.

d) $p = p_0 (1 \pm \eta_0^2)$. Untersuchung der Druckverteilung in der Querrichtung.

e) Vergleich der Hognerschen Formel mit zwei Messungen von Sottorf.

B. Druckgebiet durch zwei Parabeln begrenzt $\eta = \pm (1 - \xi_0^2)$, $p_0 = \text{konst.}$

Betrachten wir zuerst die Formel:

$$R = \int_S p \frac{\partial \zeta_0}{\partial X} d S.$$

Für den einfachsten Fall

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial X} = \text{konst.} = \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wird

$$W = R = P \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

ein selbstverständliches Ergebnis. Bei gegebener Belastung ist der Winkel α möglichst gering zu halten, um den Widerstand zu drücken. Nach der Beziehung $R = P \sin \alpha = A \operatorname{tg} \alpha$ ist von Sottorf in einem umfangreichen Versuchsprogramm für ebene Platten der Formwiderstand ausgewertet worden mit dem Ergebnis, daß bei Anwendung der Prandtlschen Beiwerte für den restlichen Reibungswiderstand eine ausgezeichnete Uebereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung festgestellt werden konnte; mit anderen Worten: es existieren nur Verluste durch Reibung und Wellenbildung. Die Anwendung des aus der Tragflächentheorie übernommenen Begriffes »induzierter Widerstand« auf Gleitvorgänge, welcher sich in der Literatur einzubürgern scheint, ist nicht haltbar und hat zu Unklarheiten, wie der Abtrennung eines weiteren Wellenwiderstandes geführt. Die hydrodynamische Erklärung des Widerstandes eines endlich langen Tragflügels und eines Gleitkörpers ist gänzlich verschieden, im ersten Fall müssen gebundene und freie Wirbel angenommen werden, im zweiten ist die Bewegung durch ein Geschwindigkeitspotential charakterisiert; gemeinsam ist beiden Problemen nur das Auftreten eines Widerstandes im idealen Medium. Dementsprechend unterscheiden sich auch die Widerstandsgesetze. Die Hognersche Formel hat den Typus

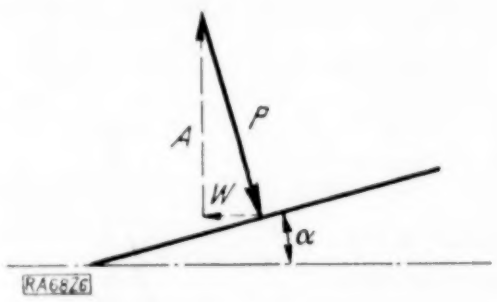


Abb. 6.

$$\left.\begin{aligned} R = \frac{P^2}{\pi \varrho v_0^2 a^2} \cdot \frac{E}{\delta^2} = \frac{P^2}{\pi \varrho v_0^2 b^2} \cdot \frac{E_1}{\delta^2}, \qquad E = E(f, \mu) = \frac{E_1}{\mu^2} \\ \mu = b : a, \qquad P = p_0 \cdot (\text{Fläche } S) \cdot \delta, \qquad f^2 = \frac{v_0^2}{2 a \cdot g} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Die Länge des Druckgebietes 2a entspricht der Flügeltiefe, die Breite 2b der Spannweite, während nach der bekannten Prandtlschen Beziehung

$$W_i = \frac{A^2}{\pi \frac{\varrho}{2} v_0^2 (2 b)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Bei festem $A \sim P$ fällt für den Tragflügel W_i quadratisch mit der Breite, während für das Gleitfahrzeug die Breitenabhängigkeit von der Froudeschen Zahl mitbestimmt

wird und der Exponent von b sich etwa zwischen $1-1{,}7$ bei den üblichen Verhältnissen ändert (s. weiter Diagramm 8).

A. Rechteckige Bereiche.

a) Man könnte die Hognerschen Integrale für verschiedene Froudesche Zahlen, Gebiete und Drücke tabellieren; wegen der großen Zahl von Argumenten wird die Arbeit sehr umfangreich sein. Wir wollen uns für die Zwecke der praktischen Rechnung der Zwischenfunktion [1]) M, M' bedienen, durch welche sich R sofort bei gegebenem $p = p_0 \sum\sum a_{mn}\, \xi_0^m\, \eta_0^n$ ausdrücken läßt,

$$R = C_1 \int_0^\infty \{[\sum_m \sum_n \sigma_{mn}\, M_m'(\gamma_1)\, M_n'(\gamma_2)]^2 + [\sum_m \sum_n \sigma_{mn}\, M_m(\gamma_1)\, M_n(\gamma_2)]^2\}\,(u^2+1)^{3/2}\,du \quad (47)$$

$$m = 0, 2, 4, \quad m = 1, 3, 5, \qquad R = C_1 \varkappa_1^2 E = C E,$$
$$n = 0, 2, 4, \quad n = 1, 3, 5,$$

wobei wir das Integral gleich $\varkappa_1^2 E$ gesetzt haben und darauf $\varkappa_1^2 \cdot C_1 = C$ bilden,

$$C = \frac{P^2}{\pi \varrho v_0^2 a^2} \cdot \frac{1}{\delta^2} = \frac{16}{\pi \varrho v_0^2} b^2 p_0^2, \qquad P = 4\, a\, b\, p_0\, \delta$$

die Einführung des spez. Druckes p statt P ist notwendig, wenn $P = 0$ wird, d. h. die Hognersche Form des Koeffizienten ihren Sinn verliert.

Weiterhin ist folgende Ueberlegung im Auge zu behalten:
Für $p = p_0 =$ konst. konvergiert das Integral:

$$R = C_1 \int_0^\infty M_0'^2(\gamma_1)\, M_0'^2(\gamma_2)\,(u^2+1)^{3/2}\,du = C_1 \frac{1}{\varkappa_1^2} \int_0^\infty \sin^2\gamma_1\, M_0'^2(\gamma_2)\,(u^2+1)^{1/2}\,du = C \cdot E$$

$$\text{da} \quad M_0'(\gamma_1) = \frac{\sin\gamma_1}{\gamma_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

bei kleinen $f = \sqrt{\frac{v_0^2}{2\,g\,a}}$ sehr schnell, so daß der Fehler, den wir begehen, wenn die Berechnung nach Ermittlung von drei Wellen des Integrals E abgebrochen wird, unwesentlich ist. Bei höheren f (etwa von 0,7 an) verfahren wir analog und überlegen dann weiter:

Es ist zu beachten, daß für große u in E die Funktion $\sin^2\gamma_1$ linear, die andere $M' \cdot (\gamma_2)$ dagegen von dem Quadrat des Parameters u abhängt, d. h. bei genügend großem u der zweite Faktor eine Welle beschreibt, ohne daß sich das Produkt $(u^2+1)^{1/2} \sin^2\gamma_1$ in dem entsprechenden Bereich wesentlich ändert. Das Integral kann wie folgt dargestellt werden:

$$E = \int_0^{u_0} 3\ \text{Wellen} + \int_{u_0}^\infty \sin^2\gamma_1\,(u^2+1)^{1/2}\,\frac{\sin^2\gamma_2}{\gamma_2^2}\,du = \sim \int_0^{u_0} + \frac{1}{\varkappa_2^2} \int_{u_0}^\infty \sin^2\gamma_2\,\frac{\sin^2\gamma_1}{u^3}\,du = \int_0^{u_0} + \Delta \quad (49)$$

da für große u $\gamma_1 \sim \varkappa_1 u$, $\gamma_2 \sim \varkappa_2 u^2$. Ist jetzt u_0 genügend groß, so kann unter Beachtung der Tatsache, daß $\frac{\sin^2\gamma_1}{u^3}$ eine positiv definite Größe ist, mit genügender Genauigkeit

$$\Delta = \frac{0{,}5}{\varkappa_2^2} \int_{u_0}^\infty \frac{\sin^2\gamma_1}{u^3}\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

gesetzt werden. Anschaulich geht aus nebenstehender Skizze hervor, daß die gesuchte Fläche ungefähr dem ganzen Gebiet multipliziert mit dem Völligkeitsgrad der Sinus²-Wellen (0,5) entspricht, da die Sinus²-Kurve hierbei aus jedem elementaren Rechteck die Hälfte des Inhalts wegschneidet.

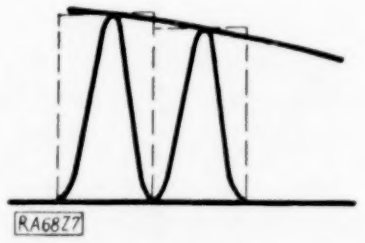


Abb. 7.

Das Restglied lautet daher

$$\Delta = \frac{1}{\gamma\, \varkappa_2^2}\left[\frac{1-\cos 2\varkappa_1 u_0}{u_0^2} + \frac{\sin 2\varkappa_1 u_0}{u_0}\, 2\varkappa_1 - Ci\, 2\varkappa_1 u_0 \cdot 4\varkappa_1^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

Die Ergebnisse der Auswertung gemäß (48) sind in den Diagrammen 8, 9 als Beiwerte $\frac{E}{\delta^2}$ für gleiches P nach der Beziehung

$$R = \frac{P^2}{\pi \varrho v_0^2 a^2} \cdot \frac{E}{\delta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

[1]) J. S. T. G. 1930.

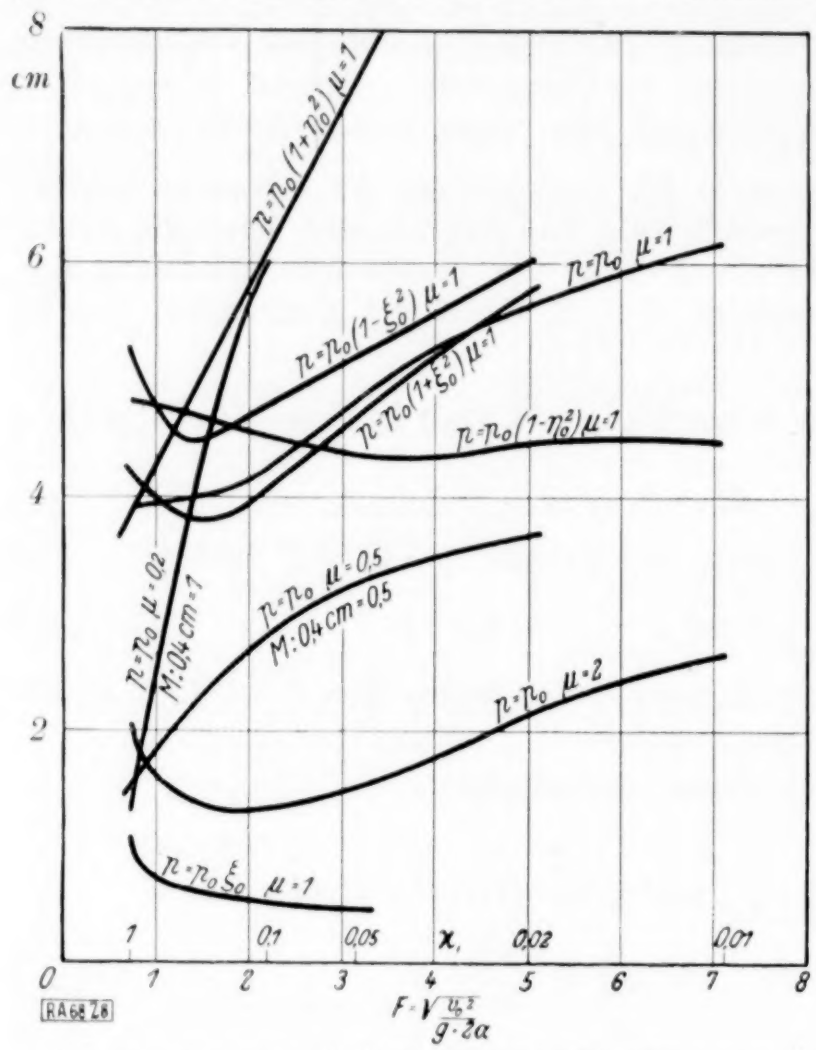


Abb. 8. Beiwerte E/δ^2 der Formel (52) [für $p = p_0\,\xi_0$ Beiwerte E der Formel (47)] $M : 1\text{ cm} = 0{,}25$, wenn nicht anders angegeben.

als Funktion der Froudeschen Zahlen und $b : a = \mu$ dargestellt Man sieht, daß für jedes bestimmte Seitenverhältnis die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit einen besonderen Verlauf hat. Die Auftragung über μ Abb. 9 zeigt folgendes interessante Resultat: Für kleine Froudesche Zahlen bzw. große $\varkappa_1$, welche den Beginn des Gleitens angeben, nimmt der Exponent x von μ in der Beziehung $E = \sim \frac{c_1}{\mu^x} + c_2$ schnell zu. Die in der Praxis wichtigen Bereiche haben für alle Froudeschen Zahlen nur wenig verschiedene Exponenten, welche im Mittel mit 1,7 gegen den Prandtlschen Wert von 2 für Tragflächen eingesetzt werden können. Die gleiche Darstellung der Sottorfschen Versuche, Abb. 10, bestätigt generell den Verlauf der theoretischen Auswertungen; der Exponent der Breitenabhängigkeit liegt etwas tiefer — etwa bei 1,55 — und zeigt bei kleinen Seitenverhältnissen, denen kleine Froudesche Zahlen entsprechen, den charakteristischen Abfall. Auf eine Diskussion der absoluten Größen soll hier nicht eingegangen werden, da die Druckverteilungen in der Rechnung konstant und im Experiment stark veränderlich sind, nur soviel sei festgestellt, daß die Theorie um 15 bis 20 vH zu geringe Werte des Widerstandes liefert.

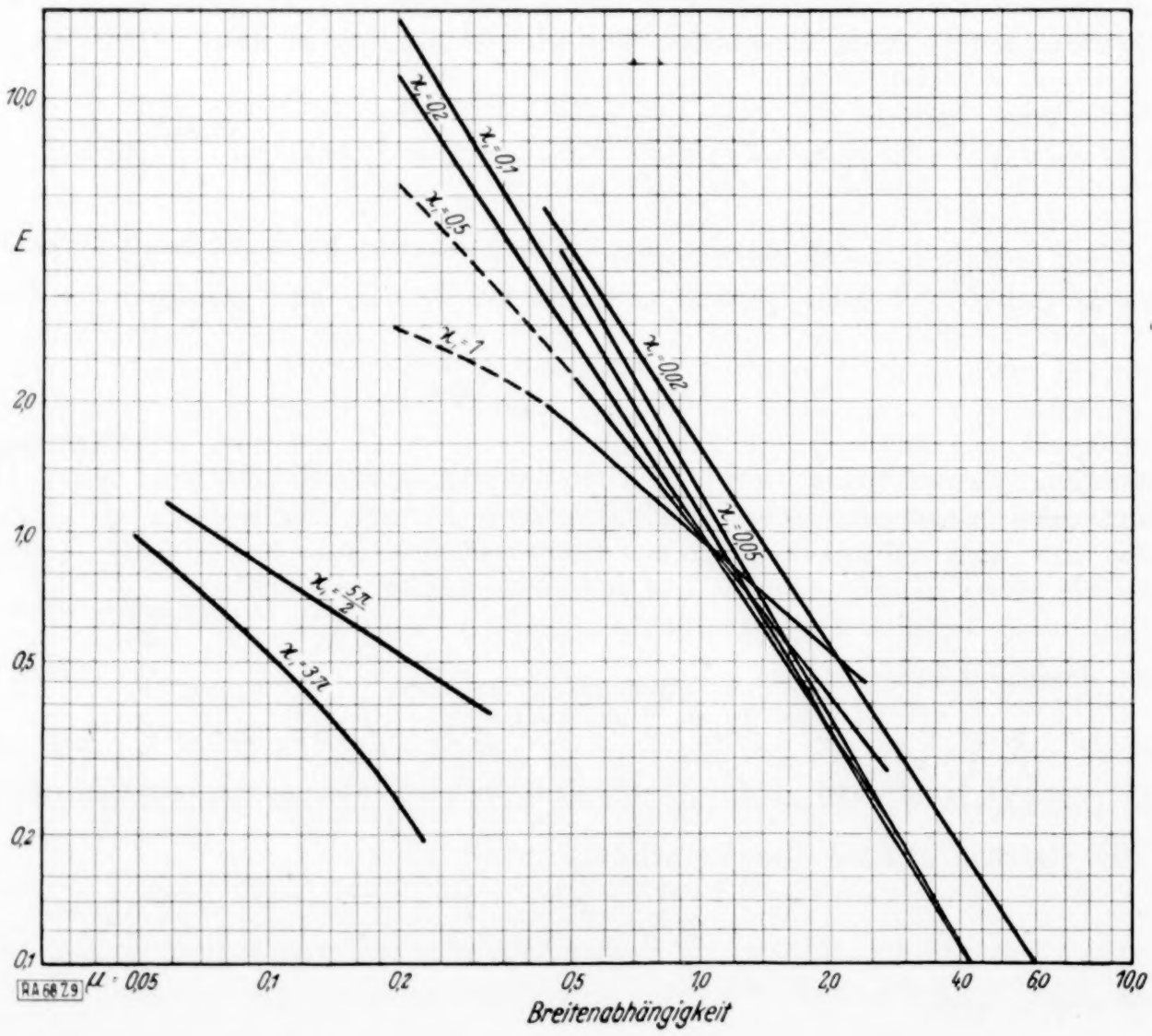


Abb. 9. Abnahme des Beiwerts E für $p = p_0 =$ konst. mit wachsender Breite.

b) Um eine weitere Annäherung an die Wirklichkeit zu erhalten, ist für quadratische Böden der zusätzliche Betrag, welcher durch lineare Unsymmetrie der Druckverteilung $p_0 \xi_0$ entsteht, berechnet. Die Werte sind ebenfalls im Diagramm 8 eingezeichnet; man sieht, daß rechnungsmäßig die Widerstandsvermehrung nur für kleine Froudeschen Zahlen erheblich sein könnte. In Wirklichkeit ist aber gerade in diesem Bereich die Abweichung von einer gleichförmigen Druckverteilung gering; für höhere Froudesche Zahlen, welche tatsächlich eine ungefähr dreieckförmige Druckkurve aufweisen, beträgt der Zusatz durch Unsymmetrie 7 bis 8 vH und fällt mit wachsender Geschwindigkeit.

Der Rechnungsgang bleibt ähnlich wie früher: von $u = 0$ bis $u = u_0$ werden 2 — 3 Wellen γ_2 gerechnet, dann können wir wie folgt verfahren

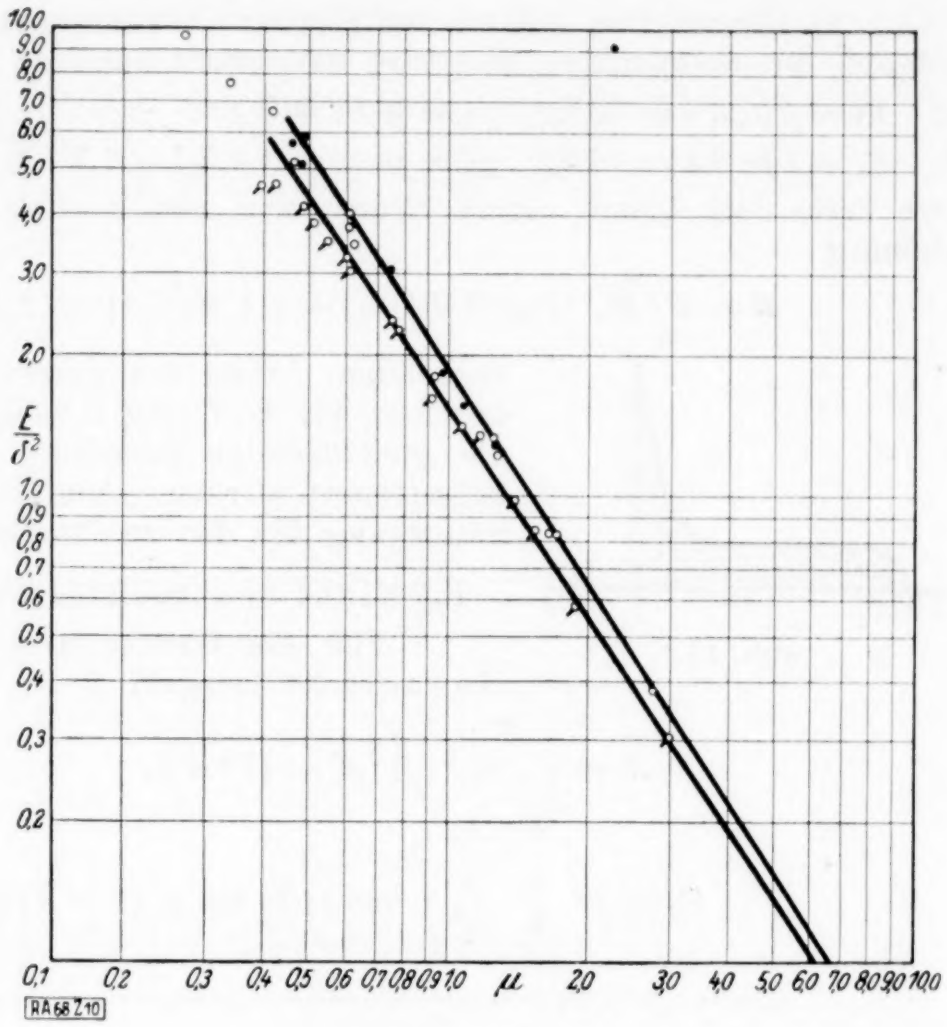


Abb. 10.
Beiwerte E/∂^2 der Formel (52) nach Versuchen von Sottorf.

$$E = \varkappa_1^2 \int_0^\infty M_1^2(\gamma_1) \cdot M_0'^2(\gamma_2)\,(u^2+1)^{3/2}\,du =$$

$$= \varkappa_1^2 \left\{ \int_0^{u_0} 2-3 \text{ Wellen } \gamma_2 + \sim 0{,}5 \int_{u_0}^\infty \frac{M_1^2(\gamma_1)}{\gamma_2^2}\,(u^2+1)^{3/2}\,du \right\} = \varkappa_1^2 \left\{ \int_0^{u_0} + \sim \frac{0{,}5}{\varkappa_2^2} \int_{u_0}^\infty \frac{M_1^2(\gamma_1)}{u}\,du \right\} \quad (53).$$

Nach Auswertung von 2 Wellen der Funktion $M_1(\gamma_1)$ sind weitere Restglieder nicht mehr notwendig. Ein ähnliches Verfahren wird überall da am Platze sein, wo die Verschiedenheit der $M_i'(\gamma_1)$ $M_i(\gamma_1)$ von der Sinus- oder Cosinus-Kurve beträchtlich ist, wir daher keine Möglichkeit haben, bequeme Restabschätzungen vorzunehmen, d. h. bei allen höheren Potenzen der Verteilungsfunktion $p(\xi_0\, \eta_0)$. Da die Beziehung $G_i(u)$ als Quadrat in das Widerstandsintegral eingeht, ist es gleichgültig (für den Widerstand!) ob

$$p = p_0\,(1+\xi) \text{ oder } p = p_0\,(1-\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54),$$

d. h. der Druck vorne oder hinten seinen höchsten Wert hat.

c) $p = p_0\,(1 \pm \xi_0^2)$ die Untersuchung gilt nur für $\mu = 1$, d h. quadratische Böden; die numerische Aufwertung bleibt dieselbe wie unter b, die Auftragung im Diagramm 8 lehrt uns folgendes: Das Auftreten von symmetrischen Staupunkten an den Enden ist im praktisch wichtigen Geschwindigkeitsgebiet nützlich, ein symmetrischer Abfall $1 - \xi_0^2$ dagegen meistenteils ungünstig.

d) $p = p_0\,(1 \pm \eta_0^2)$. Die Versuche von Sottorf zeigen nur eine geringe Aenderung der Drücke in der Richtung quer zur Fahrt, so daß die Annahme einer konstanten Verteilung in dieser Richtung, wie sie in den drei ersten Fällen gemacht wurde, eine gute Annäherung an die Wirklichkeit gibt. Da bei anderweitigen Bodenformen eine stärkere Aenderung $p = p(\eta_0)$ nicht ausgeschlossen erscheint, sind im Diagramm die Werte für $\mu = 1$ bei dieser Annahme eingetragen. Man sieht, daß die Verteilung $p = p_0\,(1 - \eta_0^2)$ für kleine Froudesche Zahlen bezogen auf den gleichen Gesamtdruck ungünstiger als $p_0 = \text{konst.}$ ist, später aber günstiger wird; die Stauverteilung am Rande $p = p_0\,(1 + \eta_0^2)$ ist praktisch durchweg ungünstiger. Die Widerstandsformel lautet

$$R = C \int_0^\infty M_0'^2(\gamma_1)\,[M_0'(\gamma_2) + M_2'(\gamma_2)]^2\,(u^2+1)^{3/2}\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

und läßt sich wie früher ohne Schwierigkeiten auswerten.

e) Für zwei im Aufsatz von Sottorf wiedergegebene Versuche mit Druckmessungen können die Belastungen wie folgt dargestellt werden:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P_1 = \int p_1\, d\,s = 36 \text{ kg} \quad p_1 = p_0\,(1+\xi_0) \\ 2. & P_2 = \int p_2\, d\,s = 18 \text{ kg} \quad p_2 = p_0\,(1+1{,}4\,\xi_0{}^8 + 2{,}3\,\xi_0{}^7) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c}\text{praktisch unabhängig} \\ \text{von } \eta_0\end{array}\right\} \quad (56).$$

Der erste Fall bietet nichts Neues, der zweite (Abb. 11) läßt sich leicht aus der Beziehung

$$R = C\int_0^\infty M_0'{}^2(\gamma_2)\,\{[M_0'(\gamma_1) + 1{,}4\,M_8'(\gamma_1]^2 + 2{,}3^2\,M_7{}^2(\gamma_1)\}\,(u^2+1)^{3/2}\,d\,u \qquad (57)$$

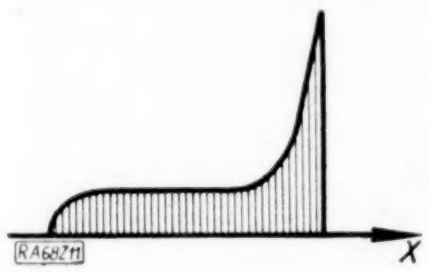


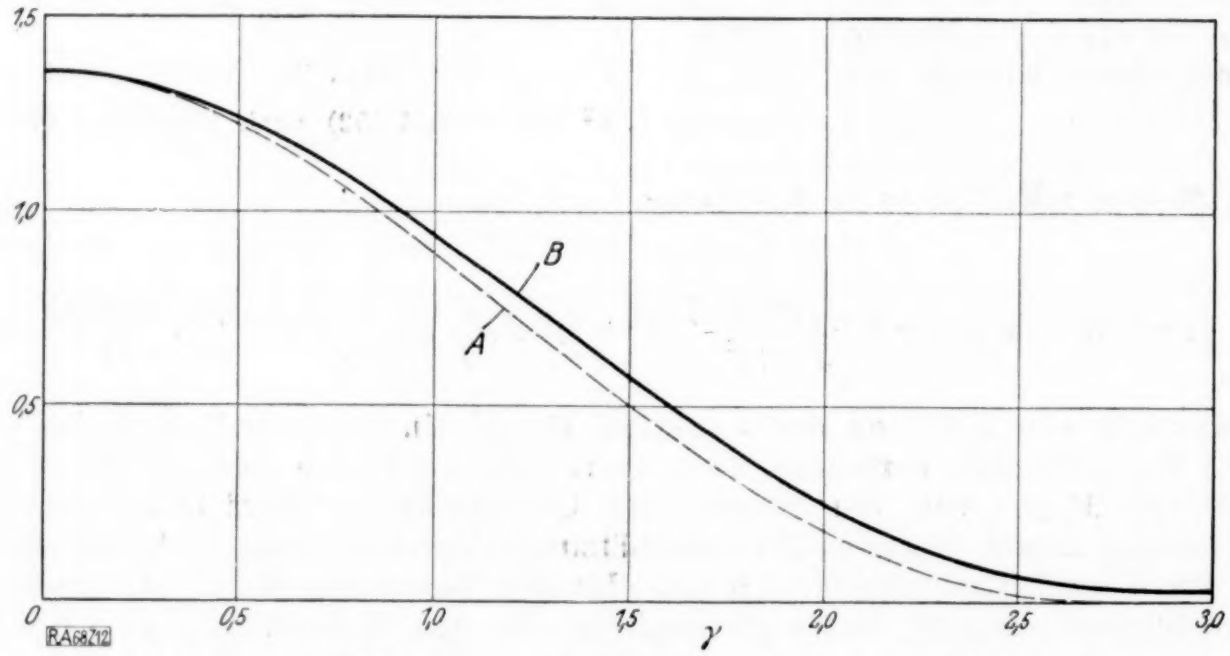
Abb. 11.

berechnen. Statt der gemessenen Werte 2,51 kg und 1,24 kg erhalten wir 2,17 und 0,98 kg, wobei von den 2,17 2,03 durch die gleichförmige Belastung und 0,14 durch die Unsymmetrie beigesteuert werden. Die Kurve 12 veranschaulicht den Rechnungsgang für das zweite Beispiel.

B. Nicht rechteckförmige Bereiche. $p = p_0 = \text{konst.}$

Für die Grenze $\eta_0 = \pm\,(1-\xi_0{}^2)$ (Abb. 13) nimmt das Hognersche Integral R die Form an

$$\left.\begin{array}{l} R = c\int_0^\infty G_r{}^2(u)\,(u^2+1)^{3/2}\,d\,u, \\ G_r(u) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\gamma_2{}^3}\int_0^1 \cos\gamma_1\,\xi_0\,\sin\gamma_2\,(1-\xi_0{}^2)\,d\,\xi_0 = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\gamma_2{}^2}\cdot H \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (58).$$



$A = [M_0'(\gamma_1) + 1{,}4\,M_8'(\gamma_1)]^2$. Abb. 12. $B = A + 5{,}29\,M_7'{}^2(\gamma_1)$.

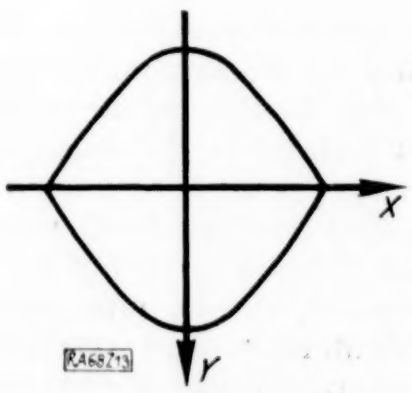


Abb. 13.

Sehr nachteilig für die Berechnung ist die Abhängigkeit der Quadraturen H von ξ_0. Für jeden Wert von u ist H durch angenäherte Integration (Simpson, Planimeter usw.) zu gewinnen, wobei wegen des fluktuierenden Vorzeichens auf Genauigkeit zu achten ist. Für große u wird die Rechenarbeit mühselig. Man könnte daher versuchen, in diesen Fällen die Methode der stationären Phasen anzuwenden (s. Lamb, S. 372)

$$J = \int_a^b \Phi(x)\,e^{-i\,f(x)}\,d\,x = \frac{\sqrt{\pi\,\Phi(\alpha)}}{\sqrt{|\,{}^1/_2\,\Phi''(\alpha)|}}\,e^{i\,[f(\alpha)\,\pm\,\pi/4]},$$

wenn $\alpha = x$ $f(x)$ stationär macht

$$\Phi(x) = \cos\gamma_1\,\xi_0, \quad f(x) = \gamma_2\,(1-\xi_0{}^2), \quad \alpha = 0, \quad J = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma_2}}\sin\,[\gamma_2 - \pi/4] \qquad (59).$$

Für kleine u ist die Genauigkeit des Verfahrens nicht befriedigend, da die Bedingung, daß viele Wellen von $\sin\gamma_2\,(1-\xi_0{}^2)$ auf $\cos\gamma_1\,\xi_0$ kommen, nicht erfüllt ist.

Beziehen wir den Vergleich zwischen quadratischer und parabolischer Grundform auf gleiches Gesamt P für $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, so sind die beiden Formen ungefähr gleichwertig; dasselbe gilt für inhaltsgleiche Flächen bei konstanten Geschwindigkeiten, da sich die Beiwerte E nicht wesentlich ändern.

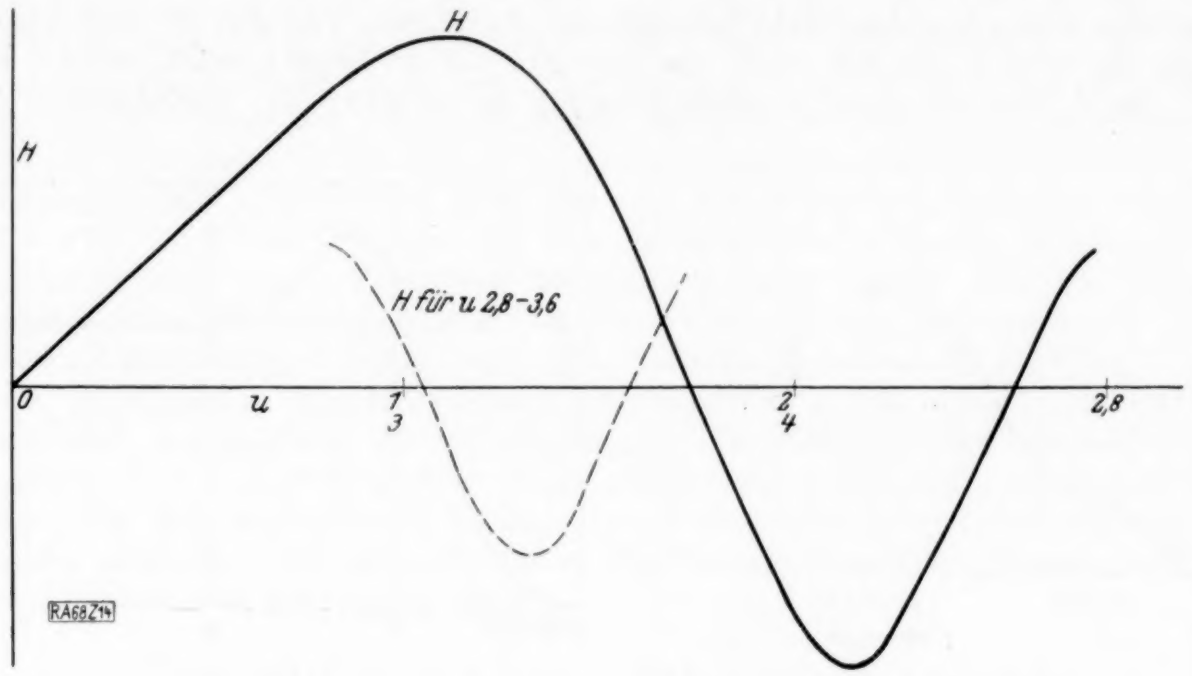


Abb. 14. $H = \int_0^1 \cos \gamma_1 \xi_0 \sin \gamma_2 (1 - \xi_0^2)\, d\xi$.

Um weitergehende Schlüsse ziehen zu können, müßte für eine Reihe von Froudeschen Zahlen und Seitenverhältnissen eine analoge Rechnung durchgeführt werden. Die numerischen Schwierigkeiten wären beträchtlich, aber nicht unüberwindlich.

Denkt man sich ein Dreieck einmal mit der Spitze, das andere Mal mit der Basis voraus durch das Wasser gesch leift,

$$_1\eta_0 = \pm (1 + \xi_0), \qquad _2\eta_0 = \pm (1 - \xi_0),$$

so wird das Widerstandsintegral $R_1 = R_2$, da

$$G_r(u) = c_1 \sin \gamma_2 \int_0^1 \cos \gamma_1 \xi_0 \cos \gamma_2 \xi_0\, d\xi_0, \quad G_i(u) = \mp c_2 \cos \gamma_2 \int_0^1 \sin \gamma_1 \xi_0 \sin \gamma_2 \xi_0\, d\xi_0 \quad (60),$$

d. h. der Widerstand ist davon unabhängig, ob wir mit der Grundlinie oder Spitze vorausfahren, natürlich immer unter Voraussetzung eines konstanten Druckes.

Außer für Gleitboote erscheint die Hognersche Lösung nicht ohne Wert für flache Deplacementsfahrzeuge, deren Tiefgang im Verhältnis zur Länge und Breite so gering ist, daß die Grundgleichung (6) unwichtig gegenüber einer angenäherten Beziehung $z_0(x, y) = \zeta_0(x, y)$ wird, doch müßten erst einige empirische Druckmessungen vorliegen. Im Diagramm 9 ist die Abhängigkeit eines langgestreckten Druckgebietes vom Breitenverhältnis bei 2 verschiedenen Froudeschen Zahlen und konstanter Verteilung untersucht worden; es ist noch nicht angängig, hieraus praktische Schlüsse zu ziehen, da der Bedingung, welche ein Deplacementsfahrzeug charakterisiert

$$P = \int_S \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{d}\, \boldsymbol{S} = 0$$

nicht genügt ist.

Für eine der wesentlichsten Aufgaben — Berechnung der Widerstandskurve eines Gleitfahrzeuges in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit kann man einige Richtlinien aufstellen:

Der Uebergang vom Schwimmen zum Gleiten läßt sich nur summarisch beschreiben, da er zwischen den Grenzannahmen der Theorie liegt. Der Widerstand des Deplacementsfahrzeugs in diesem Gebiet ist charakterisiert durch den letzten Buckel der Widerstandskurve (Abb. 15) und folgt beim Beginn des Vorgangs (soweit hiervon die Rede sein kann) einem Gesetz, welches ein langsames Ansteigen mit der Geschwindigkeit verlangt; treffen die Voraussetzungen des Gleitbootes zu, so fällt der Widerstand in der Regel etwas langsamer als das Quadrat der Geschwindigkeit, denn in

$$R = \frac{P^2}{\pi\, \varrho\, v_0^2\, b^2} \cdot \frac{E_1(f_1, \mu)}{\dot{c}^2}, \qquad b = \text{konst.}, \qquad \delta \sim \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

wird $b : a = \mu$ durch Verkürzen von (2a) infolge der Konzentration des Druckes an der eintretenden Kante mit wachsender Geschwindigkeit größer, ebenso $E_1 \sim \mu^{0.3} \cdot \varepsilon(f)$. Auch die Zunahme der Froudeschen Zahl bewirkt ein Ansteigen von E_1, so daß unter üblichen Verhältnissen E_1 mit v wächst und die Potenz von v^2 herabgesetzt wird; bei starker Aenderung von δ, welche aber unwahrscheinlich ist, können die Verhältnisse sich so ge-

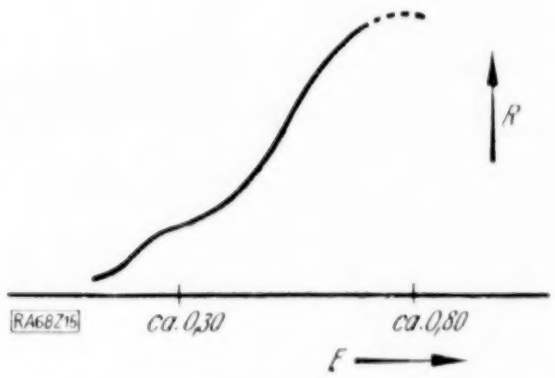


Abb. 15.

Wellenwiderstand
eines Deplacementsfahrzeugs.

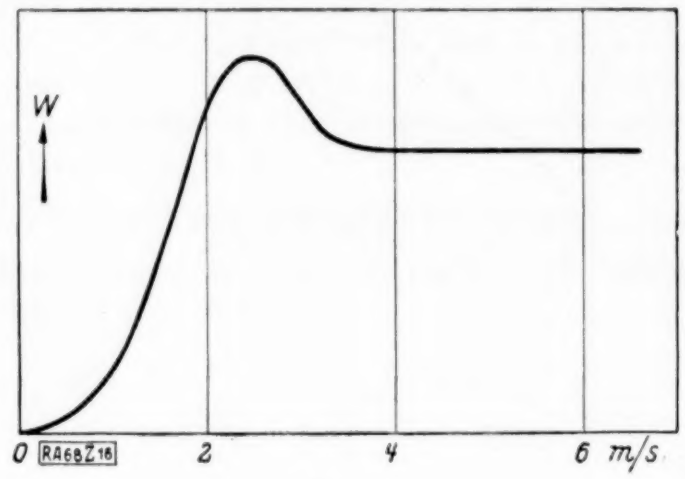


Abb. 16.

Gesamtwiderstand W
eines Gleitfahrzeugs von ~ 1 m Länge.

stalten, daß der quadratische Abfall ungefähr bestehen bleibt. Die Diagramme 8 und 9 geben den ersten rohen Anhalt zur Klärung der Widerstandsverhältnisse. Skizze 16 zeigt für ein Schwimmermodell von ca. 1 m Länge die Abhängigkeit des Gesamtwiderstandes von der Geschwindigkeit.

Zusammenfassung. Das Problem des Wellenwiderstandes ist für den ersten Grenzfall eines scharfen keilförmigen Körpers durch Michell gelöst. Für den zweiten Grenzfall des Gleitschiffes gibt die Hognersche Formel auf Grund des mechanischen Modells der Druckpunkte die Möglichkeit, folgende wichtige Aussagen zu machen:

1. Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Froudeschen Zahl, dem Seitenverhältnis und der Druckverteilung wird generell richtig wiedergegeben. Es ist unzweckmäßig, die Terminologie der Tragflächentheorie auf die Potentialbewegung der Gleitvorgänge zu übertragen.
2. Die absoluten Werte des Widerstandes sind zu klein; voraussichtlich ist die Annahme kleiner Wellenhöhen hieran schuld.
3. Die Annahme einer konstanten Druckverteilung $p = \text{konst.}$ gibt den Widerstand auch für komplizierte Verteilung in der Größenordnung richtig wieder.
4. Widerstandskurven lassen sich auf theoretischem Wege nur generell aufstellen, der Widerstand nimmt mit einer Potenz, die in der Regel etwas kleiner als die zweite ist, ab, für unendliche Geschwindigkeit wird der Wellenwiderstand gleich 0.
5. Die Theorie scheint geeignet, eine gute Arbeitshypothese für systematische Versuche, z. B. zur Auffindung günstiger Bodenformen, abzugeben. Zur Lösung von Einzelfragen ist der Versuch unentbehrlich.
6. Durch Druckmessungen an Schiffsmodellen ist zu klären, ob die Druckpunkttheorie auch für Deplacementsfahrzeuge brauchbare Beziehungen liefern kann; Hoffnungen sind in dieser Beziehung nur für flache Fahrzeuge berechtigt.

Durch die Lösungen von Michell und Hogner besteht die Aussicht, daß das Problem des Schiffswiderstandes von zwei Grenzfällen her unter Hinzuziehung ausgiebiger systematischer Versuche in weitem Umfange gefördert werden kann.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem Kollegen F. Eisner für freundliche Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit zu danken. 68

Über die Umgebung eines Strahls in optischen Systemen.

Von **M. HERZBERGER** in Jena.

A. Gullstrand[1]) hat im Jahre 1915 zuerst die verschiedenen Systemtypen charakterisiert, die in allgemeinen optischen Systemen die Abbildung der Umgebung eines Strahls, den wir im folgenden als Hauptstrahl bezeichnen wollen, kennzeichnen.

Bildet der Hauptstrahl die Achse eines rotationssymmetrischen Systems, so ist diese Strahlenabbildung eine Kollineation und führt zu den bekannten Gesetzen der Gaußschen Dioptrik, die wohl E. Abbe[2]) zuerst als rein geometrische Gesetze aufzeigte. In konsequenter Weiterführung des Abbeschen Gedankenganges sollen hier die in allgemeinen Systemen geltenden Abbildungsgesetze erster Ordnung als geometrische Gesetze der »linearen Strahlenabbildung« aufgezeigt und vollständig entwickelt werden. Die Gullstrandschen Ergebnisse, die von diesem umfassenderen Standpunkt in einem klareren Lichte erscheinen, werden sich in die allgemeine Theorie einordnen lassen.

Mit einer ersten Arbeit (Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik, Ztschr. f. Phys. Bd. **53**, Heft 3 — 4) bildet die vorliegende Arbeit den Anfang eines rein mathematischen Aufbaus der geometrischen Optik, in dem die geometrische Optik als Teil der Liniengeometrie betrachtet wird.

Teil I. Die Abbildung der Linienelemente.

1. Das allgemeine Gesetz. Eine Abbildung des vierfach unendlichen Strahlenraums auf sich selbst bezeichnen wir als Strahlenabbildung. Jede geometrisch optische Abbildung ist eine im allgemeinen eindeutige Strahlenabbildung[3]). Aber nicht jede Strahlenabbildung kann als optische Abbildung betrachtet werden. So läßt sich, worauf schon F. Klein[4]) hinwies, jedenfalls die einfachste Strahlenabbildung, die räumliche Kollineation, nicht optisch realisieren.

In der Ztschr. f. Phys. Bd. **53**, Heft 3 — 4, wurde vom Verfasser darauf hingewiesen, daß in allen optischen Abbildungen eine bestimmte Differentialform ein totales Differential ist. Es wurde ferner darauf hingewiesen, daß umgekehrt in jeder Abbildung, bei der obige Differentialform ein totales Differential ist, die bekannten optischen Gesetze, insbesondere der Fermatsche und Malussche Satz gelten.

Betrachten wir einen Strahl als gegeben durch den Vektor $\mathfrak{a}$, der von einem im Objektraum festen Koordinatenanfangspunkt nach einem beliebigen Punkt des Strahls hinweist, und den Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ in der Strahlrichtung, also durch

$$\mathfrak{a} + \lambda\,\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

analog den Bildstrahl durch

$$\mathfrak{a}' + \lambda\,\mathfrak{s}',$$

so ist eine stetige Abbildung des Strahlenraums gegeben, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ stetige, und wie wir voraussetzen wollen, stetig differenzierbare Funktionen von vier Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind.

Die Abbildung ist nach dem allgemeinen Satz nur dann eine optische, wenn in den vier Variablen gilt

$$n'\,\mathfrak{s}'\,d\,\mathfrak{a}' - n\,\mathfrak{s}\,d\,\mathfrak{a} = d\,E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierin bedeuten n bzw. n' die Brechungsexponenten in Objekt- und Bildraum. Die zu (2) gehörenden Integrabilitätsbedingungen geben

$$\left.\begin{aligned} n'(\mathfrak{s}_\alpha'\,\mathfrak{a}_\beta' - \mathfrak{s}_\beta'\,\mathfrak{a}_\alpha') &= n(\mathfrak{s}_\alpha\,\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{s}_\beta\,\mathfrak{a}_\alpha), & n'(\mathfrak{s}_\alpha'\,\mathfrak{a}_\gamma' - \mathfrak{s}_\gamma'\,\mathfrak{a}_\alpha') &= n(\mathfrak{s}_\alpha\,\mathfrak{a}_\gamma - \mathfrak{s}_\gamma\,\mathfrak{a}_\alpha)\\ n'(\mathfrak{s}_\alpha'\,\mathfrak{a}_\gamma' - \mathfrak{s}_\gamma'\,\mathfrak{a}_\alpha') &= n(\mathfrak{s}_\alpha\,\mathfrak{a}_\gamma - \mathfrak{s}_\gamma\,\mathfrak{a}_\alpha), & n'(\mathfrak{s}_\beta'\,\mathfrak{a}_\gamma' - \mathfrak{s}_\gamma'\,\mathfrak{a}_\beta') &= n(\mathfrak{s}_\beta\,\mathfrak{a}_\gamma - \mathfrak{s}_\gamma\,\mathfrak{a}_\beta)\\ n'(\mathfrak{s}_\beta'\,\mathfrak{a}_\delta' - \mathfrak{s}_\delta'\,\mathfrak{a}_\beta') &= n(\mathfrak{s}_\beta\,\mathfrak{a}_\delta - \mathfrak{s}_\delta\,\mathfrak{a}_\beta), & n'(\mathfrak{s}_\gamma'\,\mathfrak{a}_\delta' - \mathfrak{s}_\delta'\,\mathfrak{a}_\gamma') &= n(\mathfrak{s}_\gamma\,\mathfrak{a}_\delta - \mathfrak{s}_\delta\,\mathfrak{a}_\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

[1]) A. Gullstrand: Das allgemeine optische Abbildungssystem. Kungl. Svenska Vetenskapsak. Handl. Bd. **55**, Nr. 1 (1915).

[2]) Siehe Czapski-Eppenstein: Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente 3. Aufl. (1924), S. 33 — 71.

[3]) Die Ausnahmefälle, die entstehen, wenn die brechenden Flächen Unstetigkeiten oder Kanten oder Spitzen besitzen, sind optisch von geringem Interesse. Es sei hier Stetigkeit der brechenden Fläche, sowie ihrer Tangentialebenen vorausgesetzt.

[4]) F. Klein: Räumliche Kollineation bei optischen Instrumenten. Ztschr. f. Math. u. Physik. Bd. **46** (1901).

In diesen Gleichungen ist in bekannter Weise zur Abkürzung

$$\mathfrak{s}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \alpha} \text{ usf.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gesetzt. Die Gl. (3) werden den Ausgangspunkt für unsere Ueberlegungen bilden.

Wir fragen nach der Abbildung der Strahlen, die einen festen Strahl, den Hauptstrahl, umgeben. Der Begriff der Nachbarschaft bzw. Umgebung soll noch genauer präzisiert werden.

2. Punktkoordinaten, Strahlkoordinaten, gemischte Koordinaten. Wir wählen jetzt ein spezielles Koordinatensystem. Sei im Objekt- wie im Bildraum ein Koordinatenanfangspunkt gegeben und durch denselben eine Ebene von beliebiger Neigung gegen den Hauptstrahl.

Ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem ist dann im Bildraum, wie Objektraum in folgender Weise bestimmt Sei (s. Abb.) $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale, und zwar so gerichtet, daß $\mathfrak{n}$ mit der positiven Strahlrichtung (Einheitsvektor $\mathfrak{s}$) einen spitzen Winkel i bildet.

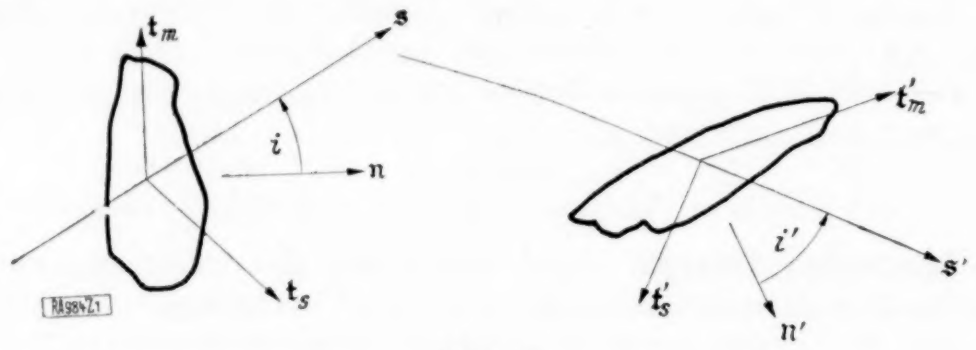


Abb. 1.

Sei $\mathfrak{t}_s$ bzw. $\mathfrak{t}_s'$ der Einheitsvektor in Richtung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{s}$, bzw. $\mathfrak{n}' \times \mathfrak{s}'$, also senkrecht zur Ebenen durch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{s}'$, der Meridianebene, sei

$$\mathfrak{t}_m = \mathfrak{t}_s \times \mathfrak{n}\,, \qquad \mathfrak{t}_m' = \mathfrak{t}_s \times \mathfrak{n}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dann ist der Einheitsvektor $\mathfrak{s}_0$ bzw. $\mathfrak{s}_0'$ in der Hauptstrahlrichtung gegeben durch

$$\mathfrak{s}_0 = \sin i\, \mathfrak{t}_m + \cos i\, \mathfrak{n}\,, \qquad \mathfrak{s}_0' = \sin i'\, \mathfrak{t}_m' + \cos i'\, \mathfrak{n}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Ein beliebiger Strahl ist gegeben durch die Koordinaten x_1, x_2, bzw. x_3, x_4 seines Durchstoßpunktes mit der gewählten Ebene bzw. durch die Richtungskosinus in bezug auf $\mathfrak{t}_m$ und $\mathfrak{t}_s$ bzw. $\mathfrak{t}_m'$ und $\mathfrak{t}_s'$.

Sei der Durchstoßpunkt objektseitig (bildseitig) gegeben durch

$$\mathfrak{a} = x_1\, \mathfrak{t}_m + x_2\, \mathfrak{t}_s\,, \qquad \mathfrak{a}' = x_3\, \mathfrak{t}_m' + x_4\, \mathfrak{t}_s' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Seien die Strahlrichtungen[1]) gegeben durch

$$\mathfrak{s} = (\sin i + \zeta_1)\, \mathfrak{t}_m + \zeta_2\, \mathfrak{t}_s + (\cos i + \zeta_2)\, \mathfrak{n}\,, \qquad \mathfrak{s}' = (\sin i' + \zeta_3)\, \mathfrak{t}_m' + \zeta_4\, \mathfrak{t}_s' + (\cos i' + \zeta_4')\, \mathfrak{n}' \quad (8).$$

Durch vier von den acht Größen

$$x_1, x_2, x_3, x_4\,; \qquad \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

sind dann im allgemeinen die andern vier Größen bestimmt.

Nehmen wir x_1, x_2, x_3, x_4 als Koordinaten, so sagen wir, wir hätten Punktkoordinaten gewählt. Ein Strahl ist dann bestimmt durch die Lage seiner Durchstoßpunkte mit den beiden ausgewählten Ebenen. Diese Koordinatenwahl versagt, wenn zwei Punkte dieser Ebenen durch mehr als einen Strahl verbunden werden.

Nehmen wir $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ als Koordinaten, so bezeichnen wir diese als Strahlkoordinaten. Ein Strahl ist in Objekt- und Bildraum dann durch seine Richtung bestimmt. Diese Koordinatenwahl ist unzulässig, wenn parallel einfallende Strahlen parallel aus dem System austreten.

Nehmen wir z. B. $x_1, x_2, \zeta_3, \zeta_4$ als Koordinaten, so sprechen wir von gemischten Koordinaten. Ein Strahl ist im Objektraum durch seinen Durchstoßpunkt mit der ausgezeichneten Ebene, im Bildraum durch seine Richtung bestimmt. Die Koordinatenwahl versagt, wenn von einem Punkt der Objektebene herkommende Strahlen parallel austreten.

Unter der Umgebung eines Strahls verstehen wir die Gesamtheit der Strahlen, für die alle Größen (9) unendlich klein von erster Ordnung sind. Dann ist

$$\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 = d\,\mathfrak{s} = \zeta_1\, \mathfrak{t}_m + \zeta_2\, \mathfrak{t}_s + \zeta_n\, \mathfrak{n}\,, \qquad d\,\mathfrak{s}' = \zeta_3\, \mathfrak{t}_m' + \zeta_4\, \mathfrak{t}_s' + \zeta_n\, \mathfrak{n}' \qquad (10).$$

[1]) Verfasser bittet, überall ξ statt ζ zu lesen.

Da $\mathfrak{s}$ ein Einheitsvektor ist, erhält man

$$\mathfrak{s}_0\, d\,\mathfrak{s} = 0 = \sin i\,\zeta_1 + \cos i\,\zeta_n, \qquad \mathfrak{s}_0'\, d\,\mathfrak{s}' = 0 = \sin i'\,\zeta_3 + \cos i'\,\zeta_n \quad . \quad . \quad (11),$$

also wird (10)

$$d\,\mathfrak{s} = \zeta_1\,\mathfrak{t}_m + \zeta_2\,\mathfrak{t}_s - \operatorname{tg} i\,\zeta_1\,\mathfrak{n}, \qquad d\,\mathfrak{s}' = \zeta_3\,\mathfrak{t}_m' + \zeta_4\,\mathfrak{t}_s' - \operatorname{tg} i'\,\zeta_3\,\mathfrak{n}' \quad . \quad . \quad (12).$$

Alle Größen (9) lassen sich nach den beliebig gewählten Koordinaten in Reihen entwickeln, die man bei unseren Voraussetzungen nach dem ersten Glied abbrechen kann.

Wählen wir Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, so können wir setzen [1])

$$\left.\begin{aligned} n\,\zeta_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 \\ n\,\zeta_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 \\ n'\zeta_3 &= -\alpha_{31}x_1 - \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 \\ n'\zeta_4 &= -\alpha_{41}x_1 - \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wählen wir Strahlkoordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, so können wir setzen

$$\left.\begin{aligned} n\,x_1 &= \beta_{11}\zeta_1 + \beta_{12}\zeta_2 + \beta_{13}\zeta_3 + \beta_{14}\zeta_4 \\ n\,x_2 &= \zeta_{21}\zeta_1 + \beta_{22}\zeta_2 + \beta_{23}\zeta_3 + \beta_{24}\zeta_4 \\ n'x_3 &= -\beta_{31}\zeta_1 - \beta_{32}\zeta_2 + \beta_{33}\zeta_3 + \beta_{34}\zeta_4 \\ n'x_4 &= -\beta_{41}\zeta_1 - \beta_{42}\zeta_2 + \beta_{43}\zeta_3 + \beta_{44}\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Wählen wir gemischte Koordinaten, so können wir setzen

$$\left.\begin{aligned} n\,\zeta_1 &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \gamma_{13}\zeta_3 + \gamma_{14}\zeta_4 \\ n\,\zeta_2 &= \zeta_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \gamma_{23}\zeta_3 + \gamma_{24}\zeta_4 \\ n'\zeta_3 &= \gamma_{31}x_1 + \gamma_{32}x_2 + \gamma_{33}\zeta_3 + \gamma_{34}\zeta_4 \\ n'\zeta_4 &= \gamma_{41}x_1 + \gamma_{42}x_2 + \gamma_{43}\zeta_3 + \gamma_{44}\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

(13) bis (15) geben uns die allgemeine lineare Geradenabbildung. Wir wollen jetzt prüfen, welche Bedingungen wegen unserer Gl. (3) bei optischer Abbildung zwischen den je 16 Koeffizienten bestehen müssen.

(7) und (10) in Verbindung mit (13) bis (15) ergeben je sechs Gleichungen, nämlich

$$\alpha_{ix} = \alpha_{xi} \quad . \quad . \quad (13a), \qquad \beta_{ix} = \beta_{xi} \quad . \quad . \quad (14a), \qquad \gamma_{ix} = \gamma_{xi} \quad . \quad . \quad (15a).$$

Die einfache Schreibweise der Gl. (13a) bis (15a) ist der Grund dafür, daß wir in (13) bis (15) einige Koeffizienten mit dem Minuszeichen versehen hatten.

Mit (13a) bis (15a) haben wir aber noch nicht alle Bedingungen dafür, daß die Gl. (13) bis (15) eine optische Abbildung darstellen; wir müssen noch darauf achten, daß bei der Abbildung jedem Objektstrahl ein und nur ein Bildstrahl entspreche. D. h. bei gegebenen $x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2$ müssen sich $x_3, x_4, \zeta_3, \zeta_4$ eindeutig ergeben und umgekehrt.

Das ergibt zu Gl. (13) die Zusatzbedingung

$$\alpha_{13}\,\alpha_{24} - \alpha_{14}\,\alpha_{23} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,b),$$

zu (14)

$$\beta_{13}\,\beta_{24} - \beta_{14}\,\beta_{23} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,b),$$

zu (15)

$$\gamma_{12}\,\gamma_{24} - \gamma_{14}\,\gamma_{23} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,b).$$

Damit sind aber alle Forderungen erschöpft. Es läßt sich zeigen, daß jede Abbildung der Umgebung eines Strahls, bei der die sechzehn Koeffizienten den Bedingungen a) und b) genügen, optisch realisierbar ist. Das soll in einer späteren Arbeit geschehen.

Strahl- und Punktkoordinaten stehen in einem sehr engen Zusammenhang. Wenn die Determinanten der Transformationen (13) und (14) nicht verschwinden, kann man von dem einen zu dem andern übergehen. Sei $\mathfrak{N}$ die Matrix

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n' \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

so ist, wie man leicht erkennt,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{B}^{-1}\,\mathfrak{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

wenn wir unter $\mathfrak{A}^{-1}$ in bekannter Weise die Matrix verstehen, die mit $\mathfrak{A}$ komponiert, die Einheitsmatrix ergibt.

[1]) Die Wahl der Vorzeichen der Koeffizienten wird sich bald als zweckmäßig erweisen.

Die zugehörigen Determinanten ergeben sich zu

$$|\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{B}| = n^4\, n'^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die Determinante der $\alpha_{i\,x}$ verschwindet nur, wenn die zu (14) gehörenden homogenen Gleichungen eine nicht triviale Lösung haben. D. h. wenn außer dem Hauptstrahl ein benachbarter Strahl existiert, der die Koordinaten

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0 \quad \text{und} \quad \zeta_3 = \zeta_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

hat, also objekt- wie bildseitig parallel zum Hauptstrahl ist. In diesem Fall und nur in diesem sind die ζ_i als Koordinaten unbrauchbar.

Die Determinante der $\beta_{i\,x}$ verschwindet, wenn außer dem Hauptstrahl ein Strahl existiert, der die Koordinatenanfangspunkte

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

verbindet, wenn also die Koordinatenanfangspunkte im Sinn der Optik »konjugiert« sind. Dann und nur dann ist die Wahl der x_i als Koordinaten unzulässig.

Die Determinante der $\gamma_{i\,x}$ verschwindet nur dann, wenn die zu (15) gehörenden homogenen Gleichungen eine nicht triviale Lösung haben. Dann existiert ein Strahl mit

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

D. h. ein zum Hauptstrahl paralleler Nachbarstrahl geht durch den bildseitigen Koordinatenanfangspunkt. Man bezeichnet in der Optik einen solchen Punkt als Brennpunkt. Die Wahl der gemischten Koordinaten ist nicht erlaubt, wenn der objektseitige Koordinatenanfangspunkt Brennpunkt ist.

3. Das Abbildungsgesetz erster Ordnung. Mit Hilfe von (13) bis (15) weist man nun nach, daß für zwei beliebige Strahlen mit den Koordinaten

$$x'_1, x_2', \zeta_1', \zeta_2' \text{ bzw. } x_3', x_4', \zeta_3', \zeta_4' \quad \text{und} \quad x_1'', x_2'', \zeta_1'', \zeta_2'' \text{ bzw. } x_3'', x_4'' \zeta_3'', \zeta_4'' \quad (22)$$

immer die Identität gilt

$$n\,[(x_1'\,\zeta_1'' + x_2'\,\zeta_2'') - (\zeta_1'\,x_1'' + \zeta_2'\,x_1'')] = n'\,[(x_3'\,\zeta_3'' - \zeta_2'\,x_3'') - (\zeta_3'\,x_3'' + \zeta_4'\,x_4'')] \quad (23).$$

Und zwar ist, je nach dem verwendeten Koordinatensystem diese Größe J gleich

$$\left.\begin{aligned} J = {} & \alpha_{13}\,(x_1'\,x_3'' - x_3'\,x_1'') + \alpha_{14}\,(x_1'\,x_4'' - x_4'\,x_1'') + \\ & + \alpha_{23}\,(x_2'\,x_3'' - x_3'\,x_2'') + \alpha_{24}\,(x_2'\,x_4'' - x_4'\,x_2'') = \\ & = \beta_{13}\,(\zeta_3'\,\zeta_1'' - \zeta_1'\,\zeta_3'') + \beta_{14}\,(\zeta_4'\,\zeta_1'' - \zeta_1'\,\zeta_4'') + \\ & + \beta_{23}\,(\zeta_3'\,\zeta_2'' - \zeta_2'\,\zeta_3'') + \beta_{24}\,(\zeta_4'\,\zeta_2'' - \zeta_2'\,\zeta_4'') = \\ & = \gamma_{13}\,(x_1'\,\zeta_3'' - \zeta_3'\,x_1'') + \gamma_{14}\,(x_1'\,\zeta_1'' - \zeta_4'\,x_1'') + \\ & + \gamma_{23}\,(x_2'\,\zeta_3'' - \zeta_3'\,x_2'') + \gamma_{24}\,(x_2'\,\zeta_1'' - \zeta_1'\,x_2'') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Gl. (23) kann man unter Benutzung von (10) und (7) auch schreiben

$$n\,(d\,\mathfrak{x}_1\,d\,\mathfrak{x}_2 - d\,\mathfrak{x}_2\,d\,\mathfrak{x}_1) = n'\,(d\,\mathfrak{x}_1'\,d\,\mathfrak{x}_2' - d\,\mathfrak{x}_2'\,d\,\mathfrak{x}_1') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wenn wir hier den ersten bzw. zweiten Strahl durch angehängte Indizes unterscheiden.

Ein Vergleich von (25) mit den Gl. (3) zeigt die nahe Beziehung dieser wichtigen Gleichung zu unserm allgemeinen Satz.

4. Lineare Abhängigkeit. Eine Anzahl Nachbarstrahlen mit den Koordinaten $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \zeta_1^{(\nu)}, \zeta_2^{(\nu)}$ heißen linear abhängig, wenn es ein Gleichungssystem mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten α_i gibt, derart, daß gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} & \alpha_1\,x_1' + \alpha_2\,x_1'' + \ldots\ \alpha_\varkappa\,x_1^{(\varkappa)} = \sum_1^\varkappa{}^{\nu}\,\alpha_\nu\,x_1^{(\nu)} = 0 \\ & \alpha_1\,x_1' + \alpha_2\,x_2' + \ldots\ \alpha_\varkappa\,x_2^{(\varkappa)} = \sum_1^\varkappa{}^{\nu}\,\alpha_\nu\,x_2^{(\nu)} = 0 \\ & \alpha_1\,\zeta_1' + \alpha_2\,\zeta_1'' + \ldots\ \alpha_\varkappa\,\zeta_1^{(\varkappa)} = \sum_1^\varkappa{}^{\nu}\,\alpha_\nu\,\zeta_1^{(\nu)} = 0 \\ & \alpha_1\,\zeta_2' + \alpha_2\,\zeta_2'' + \ldots\ \alpha_\varkappa\,\zeta_2^{(\varkappa)} = \sum_1^\varkappa{}^{\nu}\,\alpha_\nu\,\zeta_2^{(\nu)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

gilt. Wir behaupten, daß dann auch die Bildstrahlen linear abhängig sind.

Gl. (23) gilt für zwei beliebige Strahlen. Sie gilt also auch, wenn wir den zweiten Strahl mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen, also schreiben

$$n\,[(x_1\,\zeta_1^{(\nu)} + x_2\,\zeta_2^{(\nu)}) - (\zeta_1\,x_1^{(\nu)} + \zeta_2\,x_2^{(\nu)})] = n'\,[(x_3\,\zeta_3^{(\nu)} + x_4\,\zeta_1^{(\nu)}) - (\zeta_3\,x_3^{(\nu)} + \zeta_4\,x_4^{(\nu)})] \quad (27),$$

multiplizieren wir mit α_ν, summieren über ν und beachten (26), so ergibt sich

$$0 = n'\left[\left(x_3\left(\sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu \zeta_3^{(\nu)}\right) + x_4\left(\sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu \zeta_4^{(\nu)}\right)\right) - \left(\zeta_3\left(\sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu x_3^{(\nu)}\right) + \zeta_4\left(\sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu x_4^{(\nu)}\right)\right)\right] \quad (28),$$

oder, da Gl. (28) für alle Strahlen, also bei beliebigem $x_3, x_4, \zeta_3, \zeta_4$ gelten muß

$$\sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu \zeta_3^{(\nu)} = \sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu \zeta_4^{(\nu)} = \sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu x_3^{(\nu)} = \sum_1^{\varkappa \nu} \alpha_\nu x_4^{(\nu)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

D. h. die Bildstrahlen sind linear abhängig, und zwar sind die Koeffizienten dieselben wie die, welche die Abhängigkeit der Strahlen auf der Objektseite gewähren.

Zwei Strahlen sind linear unabhängig, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1', & x_2', & \zeta_1', & \zeta_2' \\ x_1'', & x_2'', & \zeta_1'', & \zeta_2'' \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

den Rang zwei hat, die Koordinaten also nicht proportional sind.

Drei Strahlen sind linear unabhängig, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1', & x_2', & \zeta_1', & \zeta_2' \\ x_1'', & x_2'', & \zeta_1'', & \zeta_2'' \\ x_1''', & x_2''', & \zeta_1''', & \zeta_2''' \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

den Rang drei hat. Vier Strahlen sind linear unabhängig, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1', & x_2', & \zeta_1', & \zeta_2' \\ x_1'', & x_2'', & \zeta_1'', & \zeta_2'' \\ x_1''', & x_2''', & \zeta_1''', & \zeta_2''' \\ x_1'''', & x_2'''', & \zeta_1'''', & \zeta_2'''' \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

den Rang vier, also eine nicht verschwindende Determinante hat.

Fünf Strahlen sind immer linear abhängig.

Sind die Koordinaten von vier linear unabhängigen Strahlen und ihren Bilderstrahlen bekannt, so kann man in folgender Weise zu jedem Strahl den Bildstrahl bestimmen.

Wir setzen für die vier bekannten Strahlen Gl. (27) an

$$\left.\begin{aligned} n[(x_1\zeta_1^{\mathrm{I}} + x_2\zeta_2^{\mathrm{I}}) - (\zeta_1 x_1^{\mathrm{I}} + \zeta_2 x_2^{\mathrm{I}})] &= n'[(x_3\zeta_3^{\mathrm{I}} + x_4\zeta_4^{\mathrm{I}}) - (\zeta_3 x_3^{\mathrm{I}} + \zeta_4 x_4^{\mathrm{I}})] \\ n[(x_1\zeta_1^{\mathrm{II}} + x_2\zeta_2^{\mathrm{II}}) - (\zeta_1 x_1^{\mathrm{II}} + \zeta_2 x_2^{\mathrm{II}})] &= n'[(x_3\zeta_3^{\mathrm{II}} + x_4\zeta_4^{\mathrm{II}}) - (\zeta_3 x_3^{\mathrm{II}} + \zeta_4 x_4^{\mathrm{II}})] \\ n[(x_1\zeta_1^{\mathrm{III}} + x_2\zeta_2^{\mathrm{III}}) - (\zeta_1 x_1^{\mathrm{III}} + \zeta_2 x_2^{\mathrm{III}})] &= n'[(x_3\zeta_3^{\mathrm{III}} + x_4\zeta_4^{\mathrm{III}}) - (\zeta_3 x_3^{\mathrm{III}} + \zeta_4 x_4^{\mathrm{III}})] \\ n[(x_1\zeta_1^{\mathrm{IV}} + x_2\zeta_2^{\mathrm{IV}}) - (\zeta_1 x_1^{\mathrm{IV}} + \zeta_2 x_2^{\mathrm{IV}})] &= n'[(x_3\zeta_3^{\mathrm{IV}} + x_4\zeta_4^{\mathrm{IV}}) - (\zeta_3 x_3^{\mathrm{IV}} + \zeta_4 x_4^{\mathrm{IV}})] \end{aligned}\right\} \quad (33).$$

Da die Strahlen linear unabhängig sind, verschwindet die Koeffizientendeterminante weder rechts noch links; man kann also $x_3, x_4, \zeta_3, \zeta_4$ bei gegebenem $x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2$ berechnen und umgekehrt.

Es ist nun natürlich auch leicht, bei gegebenen vier Strahlen die $\alpha_{i\varkappa}$ bzw. $\beta_{i\varkappa}$ bzw. $\gamma_{i\varkappa}$ zu berechnen. Wir führen die Berechnung für die $\alpha_{i\varkappa}$ durch. Sei

$$\begin{vmatrix} x_1^{\mathrm{I}}, & x_2^{\mathrm{I}}, & x_3^{\mathrm{I}}, & x_4^{\mathrm{I}} \\ x_1^{\mathrm{II}}, & x_2^{\mathrm{II}}, & x_3^{\mathrm{II}}, & x_4^{\mathrm{II}} \\ x_1^{\mathrm{III}}, & x_2^{\mathrm{III}}, & x_3^{\mathrm{III}}, & x_4^{\mathrm{III}} \\ x_1^{\mathrm{IV}}, & x_2^{\mathrm{IV}}, & x_3^{\mathrm{IV}}, & x_4^{\mathrm{IV}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

d. h. objektseitiger und bildseitiger Koordinatenanfangspunkt nicht konjugiert (nur dann sind Punktkoordinaten erlaubt), so ergeben sich die $\alpha_{i\varkappa}$ durch Auflösen der vier mal vier Gleichungen mit derselben von Null verschiedenen Determinante (34)

$$\left.\begin{aligned} n\,\zeta_1^{(\nu)} &= \alpha_{11}\,x_1^{(\nu)} + \alpha_{12}\,x_2^{(\nu)} + \alpha_{13}\,x_3^{(\nu)} + \alpha_{14}\,x_4^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4 \\ n\,\zeta_2^{(\nu)} &= \alpha_{21}\,x_1^{(\nu)} + \alpha_{22}\,x_2^{(\nu)} = \alpha_{23}\,x_3^{(\nu)} + \alpha_{24}\,x_4^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4 \text{ usf.} \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

5. Die Sätze von Clausius – Helmholtz – Straubel. Wir wollen aus unserer Formel (25) jetzt einige wichtige Folgerungen ziehen, indem wir die beiden Strahlen spezialisieren.

Der erste Strahl möge vom objektseitigen Koordinatenanfangspunkt herkommen $d\mathfrak{a}_1 = 0$. Er bilde mit dem Hauptstrahl einen Winkel, dessen Größe und Lage durch $d\mathfrak{s}_1$ gegeben ist. Er durchstoße das bildseitige Flächenelement in dem Punkt, dessen Lage durch $d\mathfrak{a}_1'$ gegeben ist.

Der zweite Strahl gehe vom bildseitigen Koordinatenanfangspunkt aus $d\mathfrak{a}_2' = 0$. Seine Lage und Richtung sei bildseitig durch $d\mathfrak{s}_2'$ gegeben; er durchstoße das objektseitige Flächenelement in dem Punkt der Entfernung $d\mathfrak{a}_2$.

Wir haben aus (25)

$$n\, d\mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} = -\, n'\, d\mathfrak{s}_2'\, d\mathfrak{a}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

oder, wenn wir

$$\left.\begin{aligned} |d\mathfrak{a}_2| = dl_2, \quad |d\mathfrak{a}_1'| = dl_1', \quad |d\mathfrak{s}_2| = d\varepsilon_2'; \quad d\mathfrak{s}_1 = d\varepsilon_1, \\ \measuredangle\,(d\mathfrak{a}_2, d\mathfrak{s}_1) = \varphi_{12}, \quad \measuredangle\,(d\mathfrak{a}_1'\, d\mathfrak{s}_2') = \varphi_{21}' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

setzen

$$n\, dl_2\, d\varepsilon_1 \cos\varphi_{12} = -\, n'\, dl_1'\, d\varepsilon_2' \cos\varphi_{21} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Gl. (38) ist die Verallgemeinerung eines Satzes von Straubel (Phys. Ztschr. 1902/03, Bd. **4**). Liegen objekt- und bildseitig die Linienelemente in der Ebene der vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Strahlen, so wird

$$\varphi = \pi/2 - \varepsilon$$

wo ε den Winkel zwischen Strahl und Linienelement bedeutet. Gl. (38) geht über in

$$n\, dl_2\, d(\cos\varepsilon_1) = -\, n'\, dl_1'\, d(\cos\varepsilon_2') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39.)$$

Aus (36) erhält man, wie in der Ztschr. f. Phys. 1929, Bd. **53** nachgewiesen wurde, die Clausius-Helmholtzsche Gleichung und damit die Beziehung zu den energetischen Sätzen.

6. Gesetze der Abbildung. Wir nehmen jetzt an, unsere Koordinatenanfangspunkte seien aufeinander abgebildet. D. h. es gibt einen Strahl mit den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 = 0 \quad \zeta_1^0 \sim \qquad x_3^0 = 0 \quad \zeta_3^0 \sim \\ x_2^0 = 0 \quad \zeta_2^0 \sim \qquad x_4^0 = 0 \quad \zeta_4^0 \sim \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40),$$

wo weder objekt-, noch bildseitig alle $\zeta_i = 0$ sind. Wir setzen diese Werte in (27) ein und erhalten

$$n\,(x_1\,\zeta_1^0 + x_2\,\zeta_2^0) = n'\,(x_3\,\zeta_3^0 + x_4\,\zeta_4^0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Gl. (41) enthält alle Gesetze der Abbildung. Zuerst:

$$x_1\,\zeta_1^0 + x_2\,\zeta_2^0 = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

stellt eine Schar paralleler Linienelemente in der objektseitig durch den Koordinatenanfangspunkt gelegten Ebene dar

$$x_3\,\zeta_3^0 + x_4\,\zeta_4^0 = C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

analog auf der Bildseite.

Gl. (41) besagt, daß alle dreifach unendlich vielen Strahlen, die objektseitig durch ein Linienelement (42) gehen, bildseitig durch das Linienelement (43) gehen, für das gilt

$$n\,C = n'\,C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44.)$$

Gullstrand nennt zwei derartige Linienelemente abbildbar. Man kann hier nicht von einer Abbildung der Punkte reden; die von einem Punkt herkommenden Strahlen verteilen sich bildseitig über das ganze Linienelement. Wir sehen, auf jedem Ebenenpaar durch zwei konjugierte Punkte des Hauptstrahls gibt es ein System paralleler abbildbarer Linienelemente. Die abbildbaren Lienienelemente durch den Koordinatenanfangspunkt $C = C' = 0$ liegen in einer Ebene durch den Hauptstrahl, die senkrecht steht auf der Ebene, in der das abbildende Büschel verläuft.

In folgender Weise kann man trotzdem noch von einer Art Abbildung von Linienelementen sprechen: Die beiden Koordinatenanfangspunkte sind durch ein ebenes Büschel verbunden. Seien zwei beliebige Punkte unserer Flächenelemente auch durch ein ebenes Büschel verbunden, dann können wir von der halbstigmatischen Abbildung des von den Punkten gebildeten Linienelements sprechen. Wir verstehen darunter eine punktweise Zuordnung der Punkte der Linienelemente, und zwar durch ebene Büschel.

Wir sehen, in diesem Sinn wird ein Linienelement »abgebildet« auf jedes Linienelement, von dessen Anfangs- und Endpunkt wir nur wissen, daß sie auf zwei festen Linienelementen der Schar (43) liegen. C' ist dabei durch (44) und (42) gegeben.

7. Die Umgebung eines Stigmatpunktes. Unter einem Stigmatpunkt verstehen wir einen Punkt des Hauptstrahls, der die Eigenschaft hat, daß zwei linear unabhängige und darum alle von ihm ausgehenden Nachbarstrahlen bildseitig sich in einem Punkt des Hauptstrahls vereinigen. Sei unser Koordinatenanfangspunkt objekt- und

bildseitig Stigmatpunkt. Es gibt zwei linear unabhängige Strahlen, die sich bildseitig im Koordinatenanfangspunkt vereinigen. Ihre Koordinaten seien

$$\left.\begin{aligned} x_1' = x_1'' = 0, \quad \zeta_1', \zeta_1'' \sim, \qquad x_3' = x_3'' = 0, \quad \zeta_3', \zeta_3'' \sim \\ x_2' = x_2'' = 0, \quad \zeta_2', \zeta_2'' \sim; \qquad x_4' = x_4'' = 0, \quad \zeta_4', \zeta_4'' \sim \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Wir setzen (45) in (27) ein und erhalten das Gleichungspaar

$$n(x_1\zeta_1' + x_2\zeta_2') = n'(x_3\zeta_3'' + x_4\zeta_4''), \qquad n'(x_1\zeta_1'' + x_2\zeta_2'') = n'(x_3\zeta_3'' + x_4\zeta_4'') \quad (46).$$

Da die beiden Strahlen als linear unabhängig angenommen waren, müssen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & \zeta_1', & \zeta_2' \\ 0, & 0, & \zeta_1'', & \zeta_2'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0, & 0, & \zeta_3', & \zeta_4' \\ 0, & 0, & \zeta_3'', & \zeta_4'' \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

und (48)

den Rang zwei haben, d. h. es muß

$$\zeta_1'\zeta_2'' - \zeta_2'\zeta_1'' \neq 0, \qquad \zeta_3'\zeta_4'' - \zeta_4'\zeta_3'' \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

sein. Dann lassen sich aber die Gl. (46) bei gegebenem x_1, x_2 nach x_3, x_4 auflösen, d. h. die Strahlen von einem festen Punkt x_1, x_2 gehen bildseitig durch einen festen Punkt x_3, x_4. Die beiden Flächenelemente werden punktweise aufeinander abgebildet.

Wir sehen: Zwei beliebige Flächenelemente durch einen Stigmatpunkt werden bis auf Größen höherer Ordnung aufeinander abgebildet. Wir können in Gl. (46) statt ζ_1' und ζ_1'' auch zwei beliebige linear unabhängige Strahlen aus der Schar

$$\zeta_1^* = \alpha\zeta_1' + \beta\zeta_1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

auswählen. Insbesondere können wir diese Strahlen so wählen, daß sie objekt- und bildseitig in zwei zueinander senkrechten Ebenen durch den Hauptstrahl liegen, daß also

$$\zeta_1^*\zeta_1^{**} + \zeta_2^*\zeta_2^{**} = 0, \qquad \zeta_3^*\zeta_3^{**} + \zeta_4^*\zeta_4^{**} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

ist.

8. Winkelvergrößerung und Lateralvergrößerung. Gehen wir wieder zu den zwei konjugierten Punkten (40) zurück. Sei u_0, u_0' der Winkel, den ein beliebiger Strahl durch die beiden Punkte mit dem Hauptstrahl bildet. Wir haben

$$\frac{du_0'}{du_0} = \frac{\sqrt{\zeta_3^{0\,2} + \zeta_4^{0\,2}}}{\sqrt{\zeta_1^{0\,2} + \zeta_2^{0\,2}}} = \gamma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Wir bezeichnen γ' als die den konjugierten Punkten zugeordnete Winkelvergrößerung. Wir können Gl. (41) auch schreiben

$$n\,d\mathfrak{a}\,d\mathfrak{s}_0 = n'\,d\mathfrak{a}'\,d\mathfrak{s}_0' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Projizieren wir jetzt die abzubildenden Linienelemente auf die Richtung von $d\mathfrak{s}_0$ bzw. $d\mathfrak{s}_0'$ also in die Richtung senkrecht zum Hauptstrahl in der Ebene der abbildenden Strahlen und bezeichnen die Projektion mit dl_p bzw. dl_p', so ergibt (53)

$$n\,dl_p\,du_0 = n'\,dl_p'\,du_0' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Wir bezeichnen das Verhältnis der Größen dl_p' und dl_p mit β' und nennen β' die die Lateralvergrößerung. Dann gibt (52) und (54) zwischen Lateralvergrößerung und Winkelvergrößerung die Beziehung

$$n'\beta'\gamma' = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

Nehmen wir insbesondere an, der Koordinatenanfangspunkt wäre ein Stigmatpunkt, so bekämen wir zwei Winkelvergrößerungen γ_1' und γ_2'.

Je nachdem ob

$$\gamma_1' \gtrless \gamma_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

ist, würden alle Richtungen des Flächenelements mit gleicher oder verschiedener Lateralvergrößerung abgebildet. Je nachdem würde also ein zum Hauptstrahl senkrechtes kreisförmiges Flächenelement auf ein zum Hauptstrahl senkrechtes kreisförmiges oder elliptisches Flächenelement abgebildet. Je nachdem bezeichnen wir die Abbildung als verzerrt oder unverzerrt.

9. Brennweite. Wir betrachten jetzt einen zum Hauptstrahl parallel einfallenden Strahl, der bildseitig den Hauptstrahl schneiden möge. Das Verhältnis der Einfallshöhe (des Abstandes vom Hauptstrahl zum Nachbarstrahl) zum bildseitigen Winkel zwischen Hauptstrahl und Nachbarstrahl bezeichnet man als Brennweite f'. Es ist

$$f' = \frac{dh}{d\varepsilon'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Hierbei ist aber zu beachten, daß der Winkel im Sinn der Optik, also umgekehrt wie in der Mathematik üblich, gemessen wird. Die Untersuchungen über abbildbare Linien lassen sich genau auf die »Abbildung« der unendlich fernen Ebene übertragen. Hier spielt die »Brennweite« die Rolle, die zuvor der Winkelvergrößerung zukam. Wenn zwei linear unabhängige und darum alle Strahlen parallel zum Hauptstrahl den Hauptstrahl bildseitig wieder in einem Punkt schneiden, so sagen wir, der unendlich ferne Punkt hat einen Stigmatpunkt. Je nachdem, ob dann

$$f_1' = f_2' \qquad f_1' \neq f_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

ist, sprechen wir dann von einer verzerrten bzw. unverzerrten Abbildung des unendlich fernen Punktes. Ein System, bei dem ein zum Hauptstrahl paralleler Strahl parallel austritt, heiße halbbrennpunktslos (hemiafokal bei Gullstrand). Bei Betrachtung dieses Strahls tritt an die Stelle der Winkelvergrößerung das Abstandsverhältnis von ein- und austretendem Strahl. Wir bezeichnen dies Verhältnis als Fernrohrvergrößerung.

Treten zwei linear unabhängige und damit alle Strahlen parallel zum Haupsstrahl aus, so heiße das System brennpunktslos (afokal bei Gullstrand). Je nachdem, ob die beiden Vergrößerungen gleich oder verschieden sind, erfolgt verzerrte oder unverzerrte Abbildung.

10. Der Malussche Satz. Das Gullstrandsche Fundamentalgesetz. Aus Gründen der Vollständigkeit seien noch zwei Punkte erwähnt. Eine Kongruenz läßt sich, wenn wir nur die dem Hauptstrahl benachbarten Strahlen betrachten, durch zwei ihrer Strahlen in der Form

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 &= \alpha x_1' + \beta x_1'', & x_3^0 &= \alpha x_3' + \beta x_3'' \\ x_2^0 &= \alpha x_2' + \beta x_2'', & x_4^0 &= \alpha x_4' + \beta x_4'' \\ \zeta_1^0 &= \alpha \zeta_1' + \beta \zeta_1'', & \zeta_3^0 &= \alpha \zeta_3' + \beta \zeta_3' \\ \zeta_2^0 &= \alpha \zeta_2' + \beta \zeta_2'', & \zeta_4^0 &= \alpha \zeta_4' + \beta \zeta_4'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

mit variablem α, β darstellen. Eine solche »lineare« Kongruenz stellt für den Hauptstrahl objektseitig dann und nur dann eine Normalenkongruenz dar, wenn

$$\mathfrak{s}_\alpha \mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{s}_\beta \mathfrak{a}_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

ist. Das gibt

$$(x_1' \zeta_1'' + x^{2'} \zeta_2'') - (x_1'' \zeta_1' + x_2'' \zeta_2') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Unsere Fundamentalgleichung zeigt, daß Gl. (61) bis auf den Faktor n gerade unsere Invariante ist; d. h. auch die bildseitige Kongruenz ist für den Hauptstrahl eine Normalenkongruenz. Diese Tatsache ist für unsere Abbildung des unendlich dünnen Raums um den Hauptstrahl der Ausdruck dafür, daß der Malussche Satz durch unsere Abbildungen erfüllt wird, d. h. daß stets Normalensysteme in Normalensysteme übergehen. Bekanntlich liegen bei Normalensystemen die Strahlen, die den Hauptstrahl schneiden, wenn es nicht alle tun, in zwei zueinander senkrechten Ebenen durch den Hauptstrahl.

Wir wollen im folgenden unser Flächenelement auf der Objekt- und Bildseite als zum Hauptstrahl senkrecht liegend annehmen. In diesem Fall wird die Bestimmung der meridionalen und sagittalen Richtung nicht mehr eindeutig. Wir können jede Richtung senkrecht zum Hauptstrahl als meridionale Koordinatenrichtung nehmen. Von dieser Freiheit werden wir im folgenden ausgiebig Gebrauch machen. Denken wir uns z. B. für ein bestimmtes Normalenbündel die Koordinatenebenen objekt- und bildseitig so gewählt, daß die Koordinatenrichtungen in den Hauptschnitten des Normalenbündels liegen.

Seien p_1, p_2 bzw. p_3', p_4' die mit den Brechungsexponenten multiplizierten Entfernungen (die sogenannte »optische Entfernung«) der Vereinigungspunkte der beiden ebenen, den Hauptstrahl enthaltenden Kongruenzstrahlenbündel. Die Koordinaten aller Kongruenzstrahlen genügen dann, wie man sich leicht überlegt, den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} n x_1^0 &= - p_1 \zeta_1^0 \quad \text{bzw.} \quad n' x_3^0 = - p_3' \zeta_3^0 \\ n x_2^0 &= - p_2 \zeta_2^0 \quad \text{bildseitig} \quad n' x_4^0 = - p_4' \zeta_4^0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Setzen wir (62) in unsere Hauptgleichung ein, so bekommen wir nach leichter Umformung aus (27) für einen beliebigen Strahl

$$\zeta_1^0 (n x_1 + p_1 \zeta_1) + \zeta_2^0 (n x_2 + p_2 \zeta_2) = \zeta_3^0 (n' x_3 + p_3' \zeta_3) + \zeta_4^0 (n' x_4 + p_4' \zeta_4) \quad (63).$$

Die eingeklammerten Größen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Wir legen durch die kaustischen Punkte der Kongruenz Flächeelemente senkrecht zum Hauptstrahl.

Der nicht der Kongruenz angehörende Strahl schneidet die so bestimmten Flächenelemente in zwei Punkten. Die meridionale Koordinate des ersten Punktes ist da_1 mit

$$n\,da_1 = n\,x_1 + p_1\,\zeta_1,$$

die sagittale Koordinate des zweiten Punktes ist db_2 mit

$$n\,db_2 = n\,x_2 + p_2\,\zeta_2$$

analog bildseitig

$$\left.\begin{aligned} n'\,da_3' = n'\,x_3 + p_3'\,\zeta_3, \qquad n'\,da_4' = n'\,x_4 + p_4'\,\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64).$$

Für die Strahlen der Ausgangskongruenz wird

$$da_1 = db_2 = da_3' = db_4' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65),$$

für sie und die übrigen Strahlen gilt

$$n\,(\zeta_1^0\,da_1 + \zeta_2^0\,db_2) = n'\,(\zeta_3^0\,da_3' + \zeta_4^0\,db_4') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

worin $\zeta_1^0, \zeta_2^0, \zeta_3^0, \zeta_4^0$ die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit der Kongruenzstrahlen durchlaufen darf. Man kann also aus da_1 und db_2, da_3' und db_4' berechnen, wenn man die Kongruenzstrahlen kennt.

Obigen Satz, der auch als Verallgemeinerung der Abbildungsgesetze aufgefaßt werden kann, nimmt Gullstrand als Ausgangspunkt für seine Ueberlegungen. Er bezeichnet ihn als das optische Fundamentalgesetz.

Teil II. Die Abbildung der Punkte des Hauptstrahls.

1. Ausgezeichnete Punkte, ausgezeichnete Strahlen. Wir haben im ersten Teil die Gesetze der Abbildung eines Linienelements unter der Voraussetzung entwickelt daß der Achsenpunkt abgebildet wurde.

Wir haben uns nun mit der Frage zu beschäftigen, wie die Achsenpunkte abgebildet werden [1]). Die von einem Achsenpunkt ausgehenden Strahlen, die auch bildseitig den Hauptstrahl schneiden, bezeichnen wir als Stigmatstrahlen. Ist ein Strahl Stigmatstrahl, so besteht das ganze von ihm erzeugte lineare Büschel aus Stigmatstrahlen. Wir suchen also einen Ueberblick über die Gesamtheit der Stigmatstrahlen zu gewinnen.

Von jedem Punkt gehen, wie wir sehen werden, entweder zwei linear unabhängige Stigmatstrahlenbüschel oder unendlich viele Stigmatstrahlenbüschel aus. Wir werden sehen, daß im letzteren Fall alle Stigmatstrahlen sich bildseitig wieder in einem Punkte treffen. Einen solchen Punkt bezeichnen wir als Stigmatpunkt (bei Gullstrand Fokalpunkt).

Die von einem Punkt ausgehenden Stigmatstrahlenbüschel liegen, wie wir sehen werden, bildseitig in zwei zueinander senkrechten Ebenen. Liegen sie auch objektseitig in zwei zueinander senkrechten Ebenen, was im allgemeinen nicht der Fall ist, so bezeichnet Gullstrand den Ausgangspunkt als Orthogonalpunkt. Wie wir in Teil I, (51) erkannt haben, ist jeder Stigmatpunkt immer auch ein Orthogonalpunkt.

2. Die geometrisch-optische Bedeutung der $\alpha_{ix}, \beta_{ix}, \gamma_{ix}$-Drehung des Koordinatensystems. Wir nehmen in diesem ganzen zweiten Teil an, daß $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{s}$ (siehe Seite 468) zusammenfallen, d. h. daß die Koordinatenebenen auf dem Hauptstrahl senkrecht stehen. Wir können in diesem Fall noch über je eine Drehung des Koordinaten systems um den Hauptstrahl frei verfügen.

Betrachten wir zuerst Strahlkoordinaten. Sei (14)

$$\left.\begin{aligned} n\,x_1 &= \beta_{11}\zeta_1 + \beta_{12}\zeta_2 + \beta_{13}\zeta_3 + \beta_{14}\zeta_4, \quad n'\,x_3 = -\beta_{13}\zeta_1 - \beta_{23}\zeta_2 + \beta_{33}\zeta_3 + \beta_{34}\zeta_4 \\ n\,x_2 &= \beta_{12}\zeta_1 + \beta_{22}\zeta_2 + \beta_{23}\zeta_3 + \beta_{25}\zeta_4, \quad n'\,x_4 = -\beta_{14}\zeta_1 - \beta_{24}\zeta_2 + \beta_{34}\zeta_3 + \beta_{44}\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad (67).$$

Wir betrachten die Gesamtheit der zum Hauptstrahl parallelen Strahlen. Sie sind gegeben durch

$$\zeta_1^0 = \zeta_2^0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} n\,x_1^0 &= \beta_{13}\,\zeta_3^0 + \beta_{14}\,\zeta_4^0, \qquad n'\,x_3^0 = \beta_{33}\,\zeta_3^0 + \beta_{34}\,\zeta_4^0 \\ n\,x_2^0 &= \beta_{23}\,\zeta_3^0 + \beta_{24}\,\zeta_4^0, \qquad n'\,x_4^0 = \beta_{34}\,\zeta_3^0 + \beta_{44}\,\zeta_4^0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

---

[1]) Diese Frage wurde, gleichzeitig mit dieser Arbeit, bei etwas anderem Ausgangspunkt von meinem Kollegen H. Boegehold in einem Kapitel seiner Arbeit in den »Ergebnissen der praktischen Naturwissenschaften 1929«: Ueber die Entwicklung der Theorie der optischen Instrumente seit Abbé untersucht. Da wir auf verschiedenem Wege arbeiteten, aber unsere Ergebnisse dauernd austauschten, ist es uns unmöglich, die Priorität in jedem einzelnen Fall festzustellen. Die wichtigen, von mir nach meinem Kollegen benannten Gleichungen (97) sind aber zuerst von ihm aufgestellt, wohingegen die Ausnützung der Substitution (127) wohl hier zuerst erfolgte.

Betrachten wir die beiden letzten Zeilen in (69). Durch sie ist bildseitig ein Normalensystem bestimmt; nämlich das System der Strahlen, die objektseitig den achsenparallelen Strahlen entsprechen. Unter ihnen gibt es zwei, die den Hauptstrahl schneiden; wählen wir unsere Koordinaten so, daß diese Strahlen in den Koordinatenebenen liegen, die durch $x_4 = 0$ und den Hauptstrahl bzw. $x_3 = 0$ und den Hauptstrahl bestimmt sind, so wird in (69)

$$\beta_{34} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70).$$

Analog können wir erreichen, daß

$$\beta_{12} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70a)$$

wird. Die durch (69) und (70) bestimmte Koordinatenwahl besagt also, daß objekt- und bildseitig die Meridian- bzw. die Sagittalebene so gewählt ist, daß in ihr die Stigmatstrahlen liegen, die auf der andern Seite parallel zum Hauptstrahl verlaufen. Die achsenparallel einfallenden Stigmatstrahlen sind gegeben durch

$$\zeta_4' = 0 \quad \text{bzw.} \quad \zeta_3'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71),$$

also

$$\left.\begin{array}{llll} n\,x_1' = \beta_{13}\,\zeta_3', & n\,x_2' = \beta_{20}\,\zeta_3', & n'\,x_3' = \beta_{33}\,\zeta_3', & n'\,x_4' = 0 \\ n\,x_1'' = \beta_{14}\,\zeta_4'', & n\,x_2'' = \beta_{24}\,\zeta_4'', & n'\,x_3'' = 0, & n'\,x_4'' = \beta_{44}\,\zeta_4'' \end{array}\right\} \quad (72).$$

Wir sehen: Die optische Entfernung der Brennpunkte vom Koordinatenanfangspunkt ist

$$p_3' = -\beta_{33}, \qquad p_4' = -\beta_{44} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Sie fallen zusammen, d. h. der objektseitig unendlich ferne Punkt ist Stigmatpunkt, wenn

$$\beta_{33} = \beta_{44} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

ist. Der objektseitig unendlich ferne Punkt ist Orthogonalpunkt, wenn

$$\beta_{13}\,\beta_{14} + \beta_{23}\,\beta_{24} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

ist. Die beiden Brennweiten ergeben sich aus (72) zu

$$\left.\begin{array}{ll} n\,f_1' = \dfrac{n\,d\,h}{d\,\varepsilon} = \dfrac{n\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\zeta_3'} = -\sqrt{\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2} & \\ n\,f_2' = \qquad\qquad\qquad\qquad -\sqrt{\beta_{14}^2 + \beta_{24}^2} & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Analog ergibt sich für das bildseitig zum Hauptstrahl parallele Büschel für die optische Entfernung der Brennpunkte vom Koordinatenanfangspunkt

$$p_1 = -\beta_{11}, \qquad p_2 = -\beta_{22} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

für die Brennweiten

$$n'\,f_1 = \sqrt{\beta_{13}^2 + \beta_{24}^2}, \qquad n'\,f_2 = \sqrt{\beta_{23}^2 + \beta_{24}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78).$$

Der bildseitige unendlich ferne Punkt ist Stigmatpunkt, wenn

$$\beta_{11} = \beta_{22} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

ist. Er ist Orthogonalpunkt für

$$\beta_{13}\,\beta_{23} + \beta_{14}\,\beta_{24} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80).$$

Zwischen den Brennweiten besteht, wie aus (76) und (78) hervorgeht, die interessante Beziehung

$$n'^2\,(f_1^{-2} + f_2^{-2}) = n^2\,(f_1'^{-2} + f_2'^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81).$$

Betrachten wir Punktkoordinaten, haben also

$$\left.\begin{array}{llll} n\,\zeta_1 = \alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \alpha_{13}\,x_3 + \alpha_{14}\,x_4, & n'\,\zeta_3 = -\alpha_{13}\,x_1 - \alpha_{23}\,x_2 + \alpha_{33}\,x_3 + \alpha_{34}\,x_4 \\ n\,\zeta_2 = \alpha_{12}\,x_1 + \alpha_{22}\,x_2 + \alpha_{23}\,x_3 + \alpha_{24}\,x_4, & n'\,\zeta_4 = -\alpha_{14}\,x_1 - \alpha_{24}\,x_2 + \alpha_{34}\,x_3 + \alpha_{44}\,x_4 \end{array}\right\} \quad (82).$$

Dann untersuchen wir die Strahlen, die vom Koordinatenanfangspunkt $x_1 = x_2 = 0$ herkommen. Wir erhalten

$$\left.\begin{array}{ll} n\,\zeta_1^{\,0} = \alpha_{13}\,x_3^{\,0} + \alpha_{14}\,x_4^{\,0}, & n'\,\zeta_3^{\,0} = \alpha_{33}\,x_3^{\,0} + \alpha_{34}\,x_4^{\,0} \\ n\,\zeta_2^{\,0} = \alpha_{23}\,x_3^{\,0} + \alpha_{24}\,x_4^{\,0}, & n'\,\zeta_4^{\,0} = \alpha_{34}\,x_3^{\,0} + \alpha_{44}\,x_4^{\,0} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (83).$$

Durch Drehung des bildseitigen bzw. objektseitigen Koordinatensystems können wir erreichen, daß

$$\alpha_{12} = \alpha_{34} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

wird. In diesem Falle sind Meridian- bzw. Sagittalebene die Hauptschnitte für das Bündel, das von dem Koordinatenanfangspunkt auf der andern Seite herkommt. Führen wir für die mit n multiplizierte reziproke Entfernung eines Punktes vom Koordinatenanfangspunkt den Ausdruck optische Nähe ein und bezeichnen diese durch q bzw. q'.

Die vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Fokalstrahlen sind gegeben durch

$$x_4' = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_3' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

Wir haben also

$$\left.\begin{array}{llll} n\,\zeta_1' = \alpha_{13}\,x_3', & n\,\zeta_2' = \alpha_{23}\,x_3', & n'\,\zeta_3' = \alpha_{33}\,x_3', & n'\,\zeta_4' = 0 \\ \text{bzw.} \quad n\,\zeta_1'' = \alpha_{14}\,x_4'', & n\,\zeta_2'' = \alpha_{24}\,x_4'', & n'\,\zeta_3'' = 0 & n\,\zeta_4'' = \alpha_{44}\,x_4'' \end{array}\right\} . \quad (86).$$

Die optische Nähe der Bildpunkte des Koordinatenanfangspunkte ergibt sich zu

$$q_1' = -\alpha_{33}, \qquad q_2' = -\alpha_{44} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

die dem Koordinatenanfangspunkt zugehörigen Winkelvergrößerungen zu

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1' = \dfrac{\zeta_3'}{\sqrt{\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2}} = \dfrac{n}{n'}\,\dfrac{\alpha_{33}}{\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2}} \\ \gamma_2' = \qquad\qquad \dfrac{n}{n'}\,\dfrac{\alpha_{44}}{\sqrt{\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

analog erhalten wir für die vom bildseitigen Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Stigmatstrahlen

$$\left.\begin{array}{llll} n\,\zeta_1' = \alpha_{11}\,x_1', & n\,\zeta_2' = 0, & n'\,\zeta_3' = -\alpha_{13}\,x_1', & n'\,\zeta_4' = -\alpha_{14}\,x_1' \\ n\,\zeta_1'' = 0, & n\,\zeta_2'' = \alpha_{22}\,x_1'', & n'\,\zeta_3'' = -\alpha_{23}\,x_2'', & n'\,\zeta_4'' = -\alpha_{24}\,x_2'' \end{array}\right\} . \quad (89).$$

Die optische Nähe der Bildpunkte des bildseitigen Koordinatenanfangspunktes wird

$$q_1 = -\alpha_{11}, \qquad c\,q_2 = -\alpha_{22} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

Die Winkelvergrößerungen ergeben sich zu

$$\gamma_1 = \frac{n'\,\alpha_{11}}{n\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{14}^2}}, \qquad \gamma_2 = \frac{n'\,\alpha_{22}}{n\sqrt{\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Auch bei gemischten Koordinaten (15) kann man erreichen, daß

$$\gamma_{12} = \gamma_{34} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

wird. Das bedeutet geometrisch, daß die Meridian- und Sagittalebene objektseitig mit den Hauptschnitten des Bündels zusammenfällt, das bildseitig zum Hauptstrahl parallel austritt, während sie bildseitig mit den Hauptschnitten des Bündels zusammenfallen, das vom objektseitigen Koordinatenanfangspunkt herkommt. Den Zusammenhang der γ_{ik} mit Brennweiten und Winkelvergrößerung herzustellen, darf wohl dem Leser überlassen bleiben.

3. Die Boegeholdschen Gleichungen und ihre Verallgemeinerung. Wir wollen im folgenden Strahlkoordinaten bevorzugen. Das empfiehlt sich insbesondere deshalb, weil die Strahlkoordinaten gegenüber einer Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes eine Anzahl angenehmer Eigenschaften haben.

Legen wir das Koordinatensystem objektseitig in den Punkt der optischen Entfernung p, bildseitig in den Punkt der optischen Entfernung p', so werden die Koordinaten der Durchstoßpunkte, wenn wir die Koordinatenebenen gemäß (70) unabhängig vom Koordinatenanfangspunkt gewählt haben

$$\left.\begin{array}{l} n\,x_1^* = n\,x_1 + p\;\zeta_1 = (\beta_{11} + p)\,\zeta_1 + \beta_{13}\,\zeta_3 + \beta_{14}\,\zeta_4 \\ n\,x_2^* = n\,x_2 + p\;\zeta_2 = (\beta_{22} + p)\,\zeta_2 + \beta_{23}\,\zeta_3 + \beta_{24}\,\zeta_4 \\ n'\,x_3^* = n'\,x_3 + p_1'\,\zeta_3 = -\beta_{13}\,\zeta_1 - \beta_{23}\,\zeta_2 + (\beta_{33} + p')\,\zeta_3 \\ n'\,x_4^* + n'\,x_4 + p'\;\zeta_4 = -\beta_{14}\,\zeta_1 - \beta_{24}\,\zeta_2 + (\beta_{44} + p')\,\zeta_4 \end{array}\right\} \quad (93).$$

Es wird also

$$\left.\begin{array}{llll} \beta_{11}^* = \beta_{11} + p, & \beta_{33}^* = \beta_{33} + p', & \beta_{13}^* = \beta_{13}, & \beta_{14}^* = \beta_{14} \\ \beta_{22}^* = \beta_{22} + p, & \beta_{44}^* = \beta_{44} + p', & \beta_{23}^* = \beta_{23}, & \beta_{24}^* = \beta_{24} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (94),$$

d. h. die Größen β_{13}, β_{14}, β_{23}, β_{24} sind gegen eine Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes invariant, während die β_{11}, β_{22}, β_{33}, β_{44} einfach sich um p bzw. p' vermehren.

Wir fragen nun nach den Fokalstrahlen, die vom Punkte der optischen Entfernung p ausgehen. Für sie ist in (93)

$$x_1^* = x_2^* = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95).$$

Wir fragen, ob man p' so bestimmen kann, daß auch

$$x_3^* = x_4^* = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

wird. Das gibt vier lineare homogene Gleichungen in ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, die nur dann eine von Null verschiedene Lösung haben, wenn ihre Determinante verschwindet, wenn also

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}+p & 0 & \beta_{13} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22}+p & \beta_{23} & \beta_{24} \\ -\beta_{13} & -\beta_{23} & \beta_{33}+p' & 0 \\ -\beta_{14} & -\beta_{24} & 0 & \beta_{44}+p' \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

ist. D. h. es gibt zu jedem p im allgemeinen zwei Punkte p', also zwei konjugierte Punkte, deren optische Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt durch die beiderseitig quadratische Gl. (97) gegeben wird.

Gl. (97) wurde zuerst von meinem Kollegen Boegehold aufgestellt. Sie ist die konsequente Verallgemeinerung der Newtonschen Gleichung, die im fadenförmigen Raum um die Achse eines rotationssymmetrischen Systems Objekt- und Bildpunkt verbindet.

In analoger Weise können wir die Aufgabe nach der Abbildung einer beliebigen Kongruenz behandeln. Eine beliebige nicht halbzylindrische Kongruenz, d. h. eine Kongruenz, die keine zum Hauptstrahl parallele Nachbarstrahlen enthält, ist, soweit es sich um unsere Nachbarstrahlen handelt, gegeben durch

$$n\,x_1^0 = b_{11}\,\zeta_1^0 + b_{12}\,\zeta_2^0, \qquad n\,x_2^0 = b_{21}\,\zeta_1^0 + b_{22}\,\zeta_2^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

analog die Bildkongruenz durch

$$n'\,x_3^0 = b_{33}\,\zeta_3^0 + b_{34}\,\zeta_4^0, \qquad n'\,x_4^0 = b_{43}\,\zeta_3^0 + b_{44}\,\zeta_4^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99),$$

wo allerdings $b_{33}, b_{34}, b_{43}, b_{44}$ vorläufig als unbekannte Konstante angesehen werden sollen. Wir setzen (98) und (99) in die Gl. (13) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned} (\beta_{11}-b_{11})\,\zeta_1^0 - \beta_{12}\,\zeta_2^0 + \beta_{13}\,\zeta_3^0 + \beta_{14}\,\zeta_4^0 &= 0 \\ -b_{21}\,\zeta_1^0 + (\beta_{22}-b_{22})\,\zeta_2^0 + \beta_{23}\,\zeta_3^0 + \beta_{24}\,\zeta_4^0 &= 0 \\ -\beta_{13}\,\zeta_1^0 - \beta_{23}\,\zeta_2^0 + (\beta_{33}-b_{33})\,\zeta_3^0 - b_{34}\,\zeta_4^0 &= 0 \\ -\beta_{14}\,\zeta_1^0 - \beta_{24}\,\zeta_2^0 - b_{43}\,\zeta_3^0 + (\beta_{44}-b_{44})\,\zeta_4^0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100).$$

Wenn die durch (99) gegebene Kongruenz wirklich das Bild von (98) sein soll, so müssen die beiden letzten Gleichungen von (100) identisch erfüllt sein, sobald man in sie beliebige Werte einsetzt, die die ersten beiden Gleichungen erfüllen; d. h. die Koeffizientenmatrix von (100) kann höchstens den Rang zwei haben. Wegen (14b)

$$\beta_{13}\,\beta_{24} - \beta_{14}\,\beta_{23} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

hat sie dann aber auch genau den Rang zwei. Die gesuchten Größen $b_{33}, b_{34}, b_{43}, b_{44}$ ergeben sich dann durch Nullsetzen der Determinanten dritten Grades der Koeffizientenmatrix von (100) zu

$$\left.\begin{aligned} b_{33} &= -\frac{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} & \beta_{13} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} & \beta_{23} \\ -\beta_{13} & -\beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} \end{vmatrix}}, \qquad b_{34} = -\frac{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} & \beta_{14} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} & \beta_{24} \\ -\beta_{13} & -\beta_{14} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} \end{vmatrix}} \\ b_{43} &= -\frac{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} & \beta_{14} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} & \beta_{24} \\ -\beta_{13} & -\beta_{23} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} \end{vmatrix}}, \qquad b_{44} = -\frac{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} & \beta_{14} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} & \beta_{24} \\ -\beta_{14} & -\beta_{24} & \beta_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned}\right\} \quad (102).$$

Nur wenn

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & \beta_{22}-b_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

ist, versagt obige Berechnung. Geometrisch bedeutet dies, wie man leicht erkennt, daß die Bildkongruenz halbzylindrisch ist, d. h. zum Hauptstrahl parallele Strahlen enthält. Dann ist aber selbstverständlich die Darstellung (99) unmöglich; wir müßten zu gemischten Koordinaten übergehen.

In allen andern Fällen gibt (102) und (99) die Bildkongruenz. War die Ausgangskongruenz ein Normalensystem, so mußte, wie man in üblicher Weise erkennt,

$$\left.\begin{aligned} b_{21} &= b_{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ b_{34} &= b_{43} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad (104)$$

sein. (102) zeigt, daß dann auch

ist, also der Malussche Satz von neuem bestätigt wird. Ist übrigens eine Normalenkongruenz durch (98) mit (103) gegeben, so sind, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, die optischen Entfernungen der kaustischen Punkte der Kongruenz (Schnittpunkte von Strahl und Nachbarstrahl) die stets reellen charakteristischen Wurzeln der Matrix

$$\begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{34} & b_{44} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105),$$

während die zueinander senkrechte Lage der Hauptschnitte der Kongruenz gegeben wird durch den Winkel $\varkappa$ gegen die Meridianebene

$$\operatorname{tg} 2\varkappa = \frac{b_{34}}{b_{33}-b_{44}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106).$$

Wenden wir die soeben erlernte Methode auf das Normalenbüschel

$$n x_1 = -p\zeta_1, \qquad n x_2 = -p\zeta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

an, so erkennen wir erstens, daß die Boegeholdschen Gleichungen für reelles p immer zwei reelle Lösungen haben; wir erhalten aber außerdem noch die Neigung der Hauptebenen des austretenden Bündels, also der Ebenen, in denen die Stigmatstrahlen liegen, gegen die Meridianebene.

4. Fundamentalaufgaben. Wir wollen jetzt einige Fundamentalaufgaben in Angriff nehmen.

1. Wir betrachten die vom Punkte der optischen Entfernung p ausgehenden Strahlen. In welchen Ebenen liegen a) objektseitig, b) bildseitig die Stigmatstrahlen? Die Antwort wird durch die Gleichungen (113) bzw. (114) gegeben, die analoge Aufgabe für die im Punkt der bildseitigen Entfernung p' mündenden Strahlen durch (116) und (117).

2. Gegeben eine Ebene. Liegen in ihr Stigmatstrahlen? Wenn ja, wieviel? Durch welche Punkte gehen diese Stigmatstrahlen?

Um diese Aufgaben zu lösen, betrachten wir einen beliebigen Stigmatstrahl, der objektseitig den Hauptstrahl in der optischen Entfernung p, bildseitig in der optischen Entfernung p' vom Koordinatenanfangspunkt schneide. Wir haben

$$n x_1 = -p\zeta_1, \quad n x_2 = -p\zeta_2, \qquad n' x_3 = -p'\zeta_3, \quad n' x_4 = -p'\zeta_4 \quad (107).$$

Eliminieren wir p und p', so ergibt sich

$$n(x_1\zeta_2 - x_2\zeta_1) = 0 \qquad n'(x_3\zeta_4 - x_4\zeta_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

oder unter Beachtung von (14) die wichtigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\beta_{11}-\beta_{22})\zeta_1\zeta_2 = \beta_{13}\zeta_2\zeta_3 + \beta_{14}\zeta_2\zeta_4 - \beta_{23}\zeta_1\zeta_3 - \beta_{24}\zeta_1\zeta_4 \qquad = 0 \\ \beta_{24}\zeta_2\zeta_3 - \beta_{23}\zeta_2\zeta_4 + \beta_{14}\zeta_1\zeta_3 - \beta_{13}\zeta_1\zeta_4 + (\beta_{33}-\beta_{44})\zeta_3\zeta_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (109).$$

Dann und nur dann ist ein Strahl ein Stigmatstrahl, wenn seine Koordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ den beiden Gleichungen (109) genügen. Wir betrachten jetzt die vom Punkte der optischen Entfernung p herkommenden Strahlen. Für ihre Koordinaten gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\beta_{11}+p)\zeta_1 + \beta_{13}\zeta_3 + \beta_{14}\zeta_4 = 0 \\ (\beta_{22}+p)\zeta_2 + \beta_{23}\zeta_3 + \beta_{24}\zeta_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110),$$

Wertepaare $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, die (110) erfüllen, erfüllen natürlich die erste Gl. (109) identisch. Wir bekommen daher die Lage der Stigmatstrahlen durch den Punkt der optischen Entfernung p im Bildraum, wenn wir aus (110) und $(109)_2$ ζ_1, ζ_2 eliminieren bzw. im Objektraum, wenn wir aus (110) bzw. $(109)_2$ ζ_3, ζ_4 eliminieren. Die Elimination gibt [1])

$$\zeta_1 = -\frac{\beta_{13}}{\beta_{11}+p}\zeta_3 - \frac{\beta_{14}}{\beta_{11}+p}\zeta_4, \qquad \zeta_2 = -\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}+p}\zeta_3 - \frac{\beta_{24}}{\beta_{22}+p}\zeta_4 \quad . \quad . \quad (111)$$

$$\zeta_3 = -\frac{(\beta_{11}+p)\beta_{24}}{\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23}}\zeta_1 + \frac{(\beta_{22}+p)\beta_{13}}{\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23}}\zeta_2, \qquad \zeta_4 = \frac{(\beta_{11}+p)\beta_{23}}{\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23}}\zeta_1 - \frac{(\beta_{22}+p)\beta_{13}}{\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23}}\zeta_2 \quad (112).$$

Setzen wir (111) bzw. (112) in (109) ein, so erhalten wir für die Lage der durch den Punkt p gehenden Stigmatstrahlen in Objekt- und Bildraum die Gleichungen

$$(\zeta_4^2 - \zeta_3^2)\left(\frac{\beta_{13}\beta_{14}}{\beta_{11}+p} + \frac{\beta_{23}\beta_{24}}{\beta_{22}+p}\right) + \zeta_4\zeta_3\left(\frac{\beta_{13}^2-\beta_{14}^2}{\beta_{11}+p} + \frac{\beta_{23}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{22}+p} + \beta_{33}-\beta_{44}\right) = 0 \quad (113)$$

und

[1]) Den schon vorher behandelten Fall $p = -\beta_{11}$ bzw. $p = -\beta_{22}$ schließen wir jetzt aus. Die diesen Punkten zugeordneten Strahlen treten achsenparallel aus ($\zeta_3 = \zeta_4 = 0$).

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta_2^2\,[(\beta_{22}+p)\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})-(\beta_{22}+p)^2\,\beta_{13}\beta_{14}\,(\beta_{33}-\beta_{44})]\\
-\,&\zeta_1^2\,[(\beta_{11}+p)\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})+(\beta_{11}+p)^2\,\beta_{23}\beta_{24}\,(\beta_{33}-\beta_{44})]\\
+\,&\zeta_1\zeta_2\,[(\beta_{22}+p)\,(\beta_{13}^2+\beta_{14}^2)(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})-(\beta_{11}+p)(\beta_{23}^2+\beta_{24}^2)(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})\\
&+(\beta_{11}+p)\,(\beta_{22}+p)\,\beta_{13}\beta_{24}+\beta_{14}\beta_{23})\,(\beta_{33}-\beta_{44})=0
\end{aligned}\right\}\quad(114).$$

Gl. (113) hat für alle p zwei verschiedene reelle Lösungen, und zwar liegen diese Stigmatstrahlen, da die Koeffizienten von ζ_1^2 und ζ_3^2 entgegengesetzt gleich sind, in zwei zueinander senkrechten Ebenen durch den Hauptstrahl. Die zugehörigen Objektstrahlen tun das, wie aus (114) hervorgeht, im allgemeinen nicht. Nur wenn p der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&(\beta_{22}+p)\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})-(\beta_{22}+p)^2\,(\beta_{33}-\beta_{44})\,\beta_{13}\beta_{14}\\
=\;&(\beta_{11}+p)\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})-(\beta_{11}+p)^2\,(\beta_{33}-\beta_{44})\,\beta_{23}\beta_{24}
\end{aligned}\right.$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
&p^2\,(\beta_{33}-\beta_{44})\,(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24})+2p\,(\beta_{11}\beta_{23}\beta_{24}+\beta_{22}\beta_{13}\beta_{14})\,(\beta_{33}-\beta_{44})\\
&+(\beta_{33}-\beta_{44})^2\,(\beta_{11}^2\beta_{23}\beta_{24}+\beta_{22}^2\beta_{13}\beta_{14})\\
&+(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})=0
\end{aligned}\right\}\quad(115)$$

genügt, liegen auch die Objektstrahlen in zueinander senkrechten Ebenen. Der Ansgangspunkt der Entfernung p ist dann und nur dann ein Orthogonalpunkt.

Analog finden wir für die bildseitig vom Punkte der optischen Entfernung p' ausgehenden Strahlen, daß sie objektseitig bzw. bildseitig in den Ebenen

$$(\zeta_2^2-\zeta_1^2)\left(\frac{\beta_{13}\,\beta_{23}}{\beta_{33}+p'}+\frac{\beta_{14}\beta_{24}}{\beta_{44}+p'}\right)+\zeta_4\zeta_3\left(\frac{\beta_{13}^2-\beta_{23}^2}{\beta_{33}+p'}+\frac{\beta_{14}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{44}+p'}+\beta_{11}-\beta_{22}\right)=0\quad(116)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta_4^2\,[(\beta_{44}+p')\,(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})-\beta_{13}\beta_{23}\,(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{44}+p'^2)\\
-\;&\zeta_3^2\,[(\beta_{33}+p')\,(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})+\beta_{14}\beta_{24}\,(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{33}+p')^2\\
+\,&\zeta_2\zeta_4\,[(\beta_{44}+p')(\beta_{13}^2+\beta_{23}^2)(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})-(\beta_{33}+p')(\beta_{14}^2+\beta_{24}^2)(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})\\
&+(\beta_{33}+p')\,(\beta_{44}+p')\,(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})]=0
\end{aligned}\right\}\quad(117)$$

liegen. Die Orthogonalpunkte sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&p'^2\,(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})+2p'\,(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{33}\beta_{14}\beta_{24}+\beta_{44}\beta_{13}\beta_{23})\\
+\,&(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{33}^2\beta_{14}\beta_{24}+\beta_{44}^2\beta_{13}\beta_{23})+(\beta_{33}-\beta_{44})\,(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})=0
\end{aligned}\right\}\quad(118).$$

Die Diskriminante von (115) bzw. (118) ergibt sich als gleich

$$\left.\begin{aligned}
F=\;&(\beta_{11}-\beta_{22})^2\,(\beta_{33}-\beta_{44})^2\,\beta_{13}\,\beta_{14}\,\beta_{23}\beta_{24}\\
&-(\beta_{11}-\beta_{22})\,(\beta_{33}-\beta_{44})\,(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24})\,(\beta_{13}\beta_{23}+\beta_{14}\beta_{24})
\end{aligned}\right\}\quad(119).$$

Wir sehen also, das System hat objektseitig und bildseitig die gleiche Anzahl Orthogonalpunkte. Die Anzahl der Orthogonalpunkte wurde von Gullstrand zur Einteilung der Systeme benutzt. Er nannte Systeme ohne Orthogonalpunkt $F<0$ tordiert, Systeme mit einem Orthogonalpunkt $F=0$ semitordiert, Systeme mit zwei Orthogonalpunkten $F>0$ retordiert, Systeme mit unendlich vielen Orthogonalpunkten orthogonal.

Wir werden diese Einteilung im folgenden mitmachen. Für

$$\beta_{14}=\beta_{23}=0\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(120)$$

ist unser System, wie man aus (115) und (116) erkennt, orthogonal. Ebenso für

$$\beta_{13}=\beta_{24}=0.$$

Die Erfüllung einer dieser Bedingungen ist aber auch notwendig für die Orthogonalität. Da man die letzte Bedingung durch Vertauschung von Meridian- und Sagittalebene auf die erste zurückführen kann, werden wir in der Folge allein die erste Bedingung verwenden.

Wir fragen jetzt: Wann ist der Punkt der Entfernung p Stigmatpunkt?

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß Gl. (113) und damit auch (114) identisch erfüllt ist.

Das gibt zwei Gleichungen für p

$$\frac{\beta_{13}\,\beta_{14}}{\beta_{11}+p}+\frac{\beta_{23}\,\beta_{24}}{\beta_{22}+p}=0\,,\qquad\frac{\beta_{13}^2-\beta_{14}^2}{\beta_{11}+p}+\frac{\beta_{23}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{22}+p}+\beta_{33}-\beta_{44}=0\qquad(121).$$

Eliminieren wir p, so finden wir als notwendige und hinreichende Bedingung

$$F=0$$

d. h. das System muß semitordiert sein. Bei semitordierten Systemen gibt es einen und nur einen Stigmatpunkt, dessen objektseitige optische Entfernung sich aus $(121)_1$ zu

$$p = -\frac{\beta_{22}\beta_{13}\beta_{14} + \beta_{11}\beta_{23}\beta_{24}}{\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{23}\beta_{24}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

errechnet. Ein Vergleich von (122) mit (115) zeigt, daß der Stigmatpunkt dann auch mit dem in diesem Fall einzigen Orthogonalpunkt zusammenfällt.

Die Lage des bildseitigen Fokalpunktes ergibt sich in diesem Fall aus

$$p' = -\frac{\beta_{44}\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{33}\beta_{14}\beta_{24}}{\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{14}\beta_{24}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123).$$

Für Orthogonalsysteme verschwindet jedoch $(121)_1$ identisch.

Bei Orthogonalsystemen gibt es keinen, einen, zwei oder unendlich viel Stigmatpunkte, je nachdem ob $(121)_2$, also

$$p^2(\beta_{33}-\beta_{44}) + p[(\beta_{33}-\beta_{44})(\beta_{11}+\beta_{22}) + \beta_{13}^2 - \beta_{24}^2] + (\beta_{33}-\beta_{44})\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{13}^2\beta_{22} - \beta_{24}^2\beta_{11} = 0 \quad (124)$$

keine, eine, zwei oder unendlich viel Lösungen hat.

Ein System, bei dem jeder Punkt Stigmatpunkt ist, bezeichnen wir als Gaußsches System; wir werden sehen, in einem derartigen System gelten die Gesetze, die zuerst von Gauß für die Strahlen in der Nachbarschaft der Achse eines Rotationssystems aufgestellt sind.

Dafür, daß das System Gaußisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß (124) identisch verschwindet, also gilt

$$\beta_{33} = \beta_{44}\,, \qquad \beta_{13} = \beta_{24}\,, \qquad \beta_{11} = \beta_{22}\,, \qquad \beta_{14} = \beta_{23} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (125).$$

5. Die Fundamentalsubstitution. Wir können die Punkte des Hauptstrahls in folgender Weise einander zuordnen.

Wir betrachten die von einem Punkte der optischen Entfernung p ausgehenden Stigmatstrahlen. Sie liegen bildseitig in zwei zueinander senkrechten Ebenen.

Wir fragen, gibt es noch einen weiteren Punkt, dessen Fokalstrahlen bildseitig in denselben Ebenen liegen. Wir setzen

$$\frac{\zeta_4\zeta_3}{\zeta_4^2-\zeta_3^2} = \alpha = -\frac{\frac{\beta_{13}\beta_{14}}{\beta_{11}+p_1} + \frac{\beta_{23}\beta_{24}}{\beta_{22}+p}}{\frac{\beta_{13}^2-\beta_{14}^2}{\beta_{11}+p_1} + \frac{\beta_{23}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{22}+p_1} + \beta_{33}-\beta_{44}} = -\frac{\frac{\beta_{13}\beta_{14}}{\beta_{11}+p_2} + \frac{\beta_{23}\beta_{24}}{\beta_{22}+p_2}}{\frac{\beta_{13}^2-\beta_{14}^2}{\beta_{11}+p_2} + \frac{\beta_{23}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{22}+p_2} + \beta_{33}-\beta_{44}}$$

und finden nach Durchführung der Rechnung

$$p_2 = -\frac{(\beta_1\beta_{23}\beta_{24} + \beta_{22}\beta_{13}\beta_{14})(\beta_{33}-\beta_{44})p_1}{(\beta_{23}\beta_{24}+\beta_{13}\beta_{14})(\beta_{33}-\beta_{44})p_1} +$$
$$+\frac{(\beta_{11}-\beta_{22})(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})(\beta_{13}\beta_{28}+\beta_{14}\beta_{24}) + (\beta_{33}-\beta_{44})(\beta_{11}^2\beta_{23}\beta_{24}+\beta_{22}^2\beta_{13}\beta_{14})}{(\beta_{11}\beta_{23}\beta_{24}+\beta_{22}\beta_{13}\beta_{14})(\beta_{33}-\beta_{44})} \quad (126)$$

analog finden wir für die bildseitige Zuordnung der Substitution

$$p_2' = -\frac{(\beta_{33}\beta_{14}\beta_{24} + \beta_{44}\beta_{13}\beta_{23})(\beta_{11}-\beta_{22})p_1}{(\beta_{14}\beta_{24}+\beta_{13}\beta_{23})(\beta_{11}-\beta_{22})p_1} +$$
$$+\frac{(\beta_{33}-\beta_{44})(\beta_{13}\beta_{24}-\beta_{14}\beta_{23})(\beta_{13}\beta_{14}+\beta_{23}\beta_{24}) + (\beta_{11}-\beta_{22})(\beta_{23}^2\beta_{14}\beta_{24}+\beta_{44}^2\beta_{13}\beta_{23})}{(\beta_{33}\beta_{14}\beta_{24}+\beta_{44}\beta_{13}\beta_{23})(\beta_{11}-\beta_{22})} \quad (127).$$

Die Diskriminanten dieser Substitutionen sind identisch mit J; die Gleichungen, die die zugehörigen Fixpunkte bestimmen, sind identisch mit (115) und (116).

Wir erkennen also: Die Orthogonalpunkte sind die Fixpunkte unserer Substitution. Oder: Die Ebenenpaare, in denen die Stigmatstrahlen liegen, die auf der andern Seite von den Orthogonalpunkten herkommen, sind die einzigen Ebenenpaare, die nur ein ebenes Stigmatstrahlenbüschel enthalten.

Zwei Punkte, die durch obige Substitution (126) bzw. (127) miteinander verbunden sind, bezeichnen wir als gekoppelt. Wir sahen, nur die Orthogonalpunkte sind mit sich selbst gekoppelt.

Bis zu diesem Augenblick haben wir den Koordinatenanfangspunkt objekt- und bildseitig noch nicht festgelegt. Wir wählen ihn jetzt so, daß die Substitutionen (126) und (127) möglichst einfach werden. Wir behandeln hier zuerst nur (126). Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob der unendlich ferne Punkt ein Fixpunkt der Substitution (126) ist (b) oder nicht (a).

a) Betrachten wir zunächst den letzteren Fall. Dann wählen wir als Koordinatenanfangspunkt den Punkt, der mit dem unendlich fernen Punkt gekoppelt ist. Wir bezeichnen ihn mit Gullstrand als Hauptkreuzpunkt. Dann besteht zwischen den $\beta_{i\varkappa}$ die Beziehung

$$\beta_{11}\,\beta_{23}\,\beta_{24} + \beta_{22}\,\beta_{13}\,\beta_{14} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128).$$

Wir erhalten

$$p_1\,p_2 = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129).$$

Hierin ist A ein leicht zu bildender Ausdruck in den $\beta_{i\varkappa}$, der dasselbe Vorzeichen wie F hat. Für

$$A < 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

hat unser System keinen Fixpunkt, ist also tordiert. Für

$$A = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

ist jedem Punkt der Koordinatenanfangspunkt zugeordnet; das System ist also semitordiert und hat als einzigen Fixpunkt den Koordinatenanfangspunkt.

Für $$A > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

ist unser System retordiert und hat zwei Fixpunkte. Dieselben liegen vom Hauptkreuzpunkt um

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132a)$$

entfernt.

b) Sei der unendlich ferne Punkt objektseitig Orthogonalpunkt, dann wird

$$\beta_{13}\,\beta_{14} + \beta_{23}\,\beta_{24} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133).$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob der unendlich ferne Punkt der einzige Orthogonalpunkt ist oder nicht.

Im zweiten Fall legen wir den Koordinatenanfangspunkt in den zweiten Orthogonalpunkt. Die Substitution (126) wird dann

$$p_2 = -\,p_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134).$$

Gekoppelte Punkte liegen also symmetrisch zum endlichen Orthogonalpunkt; das System ist retordiert.

Ist der unendlich ferne Punkt der einzige Orthogonalpunkt, also Stigmatpunkt, dann wird jeder Punkt dem unendlich fernen Punkt zugeordnet.

Zum Schluß ist noch der Fall zu betrachten, daß das Ausgangssystem orthogonal ist. Jeder Punkt ist Orthogonalpunkt. Man kann an Stelle von (126) und (127), die versagen, die identische Substitution ansetzen.

Wir wollen jetzt die zweite Aufgabe betrachten: Wieviel Fokalstrahlen liegen in einer festen Ebene? Diese Aufgabe muß naturgemäß für ein Paar anfeinander senkrechter Ebenen dieselbe Lösung haben. Setzen wir

$$\frac{\zeta_4\,\zeta_3}{\zeta_4^2 - \zeta_3^2} = \frac{x_4\,x_3}{x_1^2 - x_3^2} = \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

und betrachten Gl. (113) als Funktion von p, wobei α als Parameter betrachtet wird. Wir finden

$$\left.\begin{aligned} &p^2\alpha(\beta_{33}-\beta_{44}) + p\{[(\beta_{33}-\beta_{44})(\beta_{11}+\beta_{22}) + \beta_{13}^2 - \beta_{14}^2 + \beta_{23}^2 - \beta_{24}^2]\alpha + \beta_{13}\beta_{14} + \beta_{23}\beta_{24}\} \\ &+ \{[(\beta_{33}-\beta_{44})\,\beta_{11}\,\beta_{22} + (\beta_{13}^2 - \beta_{14}^2)\beta_{22} + (\beta_{23}^2 - \beta_{24}^2)\,\beta_{11}]\alpha + \beta_{13}\beta_{14}\beta_{22} + \beta_{23}\beta_{26}\beta_{11}\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (136).$$

Für $\alpha = 0$ hat (136) zwei Lösungen, nämlich

$$p_1 = 0\,, \qquad p_2 = -\,\frac{\beta_{13}\,\beta_{14}\,\beta_{22} + \beta_{23}\,\beta_{24}\,\beta_{11}}{\beta_{13}\,\beta_{14} + \beta_{23}\,\beta_{24}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

die voneinander verschieden sind. Läßt man α wachsen, so nimmt Gl. (136) so lange zwei Lösungen an, bis α ein Ebenenpaar kennzeichnet, in dem die von einem Orthogonalpunkt herkommenden Stigmatstrahlen liegen.

Ist also das System tordiert, so liegen in jeder Ebene zwei ebene Stigmatstrahlenbüschel.

Ist das System semitordiert, so liegt in jeder Ebene ein ebenes Büschel, das durch den Stigmatpunkt geht. Außerdem liegt in jeder Ebene noch ein anderes Stigmatstrahlenbüschel, das durch einen andern Punkt des Hauptstrahls geht. Nur ein Ebenenpaar ist ausgezeichnet, in dem nur ein einziges Hauptstrahlenbüschel liegt. Es wird gegeben durch den in diesem Fall einzigen Wert α, für den die Diskriminante von (136) verschwindet.

Die elementare Ausrechnung darf hier wohl übergangen werden. Es sei hinzugefügt, daß die in diesen Ebenen gelegenen Strahlen die früher benutzten Strahlen durch die Stigmatpunkte sind, die objekt- und bildseitig aufeinander senkrecht stehen.

Ist das System retordiert und lassen wir α zunehmen, dann behält die Diskriminante von (136) solange ihr Vorzeichen, bis wir an eine Nullstelle dieser Diskriminante kommen. Bis dahin liegen also in jeder Ebene zwei Stigmatstrahlenbüschel. In dem Ebenenpaar, dessen α Wert einer Nullstelle der Diskriminante von (136) entspricht, liegt nur ein Stigmatstrahlenbüschel, und zwar geht dieses Stigmatstrahlenbüschel objektseitig durch einen Orthogonalpunkt.

Die Diskriminante von (136) ändert nun bei weiterem Wachstum von α ihr Vorzeichen und bleibt negativ bis zu dem Wert von α, der zum zweiten Orthogonalpunkt gehört. In den dazwischenliegenden Ebenen gibt es also überhaupt keine Fokalstrahlenbüschel.

Damit haben wir einen Einblick in den Aufbau eines Systems gewonnen. Wir wollen noch kurz einen Satz über die semitordierten Systeme beweisen und dann kurz zeigen, wie die bekannten Gesetze der Orthogonalsysteme und der Gaußschen Systeme sich einordnen.

6. Verzerrte Abbildung bei semitordierten Systemen. Wir behaupten:

Satz 1. Bildet ein semitordiertes System ein achsensenkrechtes Flächenelement um den Brennpunkt unverzerrt ab, so ist das System orthogonal.

Sei objektseitiger und bildseitiger Koordinatenanfangspunkt Stigmatpunkt eines semitordierten Systems. Die Matrix der β_{ix} in

$$\left.\begin{aligned} n\,x_1 &= \beta_{11}\zeta_1 + \beta_{13}\zeta_3 + \beta_{14}\zeta_4 \\ n\,x_2 &= \beta_{22}\zeta_2 + \beta_{23}\zeta_3 + \beta_{24}\zeta_4 \\ n'x_3 &= -\beta_{13}\zeta_1 - \beta_{23}\zeta_2 + \beta_{33}\zeta_3 \\ n'x_4 &= -\beta_{14}\zeta_1 - \beta_{24}\zeta_2 + \beta_{44}\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad . . . . . \quad (138)$$

hat den Rang zwei. Wir haben also vier Konstante derart, daß gilt

$$n'x_3 = n(\varkappa x_1 + \lambda x_2), \qquad n'x_4 = n(\mu x_1 + \nu x_2) \quad . . . . \quad (139)$$

und

$$\left.\begin{aligned} -\beta_{13} &= \varkappa\beta_{11} & \beta_{33} &= \varkappa\beta_{13} + \lambda\beta_{23} \\ -\beta_{23} &= \lambda\beta_{22} & 0 &= \varkappa\beta_{14} + \lambda\beta_{24} \\ -\beta_{14} &= \mu\beta_{11} & 0 &= \mu\beta_{13} + \nu\beta_{23} \\ -\beta_{24} &= \nu\beta_{22} & \beta_{44} &= \mu\beta_{14} + \nu\beta_{24} \end{aligned}\right\} \quad . . . . . \quad (140).$$

Die Abbildung ist dann und nur dann unverzerrt, wenn der Ausdruck

$$\frac{x_3^2 + x_4^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{n^2}{n'^2}\,\frac{(\varkappa x_1 + \lambda x_2)^2 + (\mu x_1 + \nu x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} = \beta'^2 \quad . . . . . \quad (141)$$

unabhängig von x_1, x_2 ist. Das gibt

$$\varkappa\lambda + \mu\nu = 0, \qquad \varkappa^2 + \mu^2 = \lambda^2 + \nu^2 \quad . . . . . \quad (142).$$

Die erste Bedingung gibt

$$\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{14}\beta_{24} = 0 \quad . . . . . \quad (143),$$

d. h. der unendlich ferne Punkt ist Orthogonalpunkt. Dann muß aber das System ein Orthogonalsystem sein. $(142)_2$ gibt dann

$$\beta_{13}\beta_{22} = \pm\beta_{24}\beta_{11} \quad . . . . . \quad (144)$$

eine Bedingung, die wir noch kennenlernen werden.

7. Orthogonalsysteme. Für $\beta_{14} = \beta_{23} = 0$ vereinfachen sich alle Formeln wesentlich. Wir sehen zuerst: Gl. (113) wird

$$\left.\begin{aligned} \zeta_3\zeta_4\left(\frac{\beta_{13}^2 - \beta_{14}^2}{\beta_{11} + p} + \frac{\beta_{23}^2 - \beta_{24}^2}{\beta_{22} + p} + \beta_{33} - \beta_{44}\right) &= 0 \\ \zeta_1\zeta_2\left(\frac{\beta_{13}^2 - \beta_{23}^2}{\beta_{33} + p'} + \frac{\beta_{14}^2 - \beta_{24}^2}{\beta_{44} + p'} + \beta_{11} - \beta_{22}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad (145).$$

D. h. alle Strahlen in der Meridianebene bzw. Sagittalebene liegen bildseitig wieder in der Meridian- bzw. Sagittalebene und sind Stigmatstrahlen.

Diese beiden Ebenen enthalten unendlich viele ebene Stigmatstrahlenbündel.

Alle übrigen Ebenen enthalten höchstens zwei ebene Stigmatstrahlenbüschel, nämlich diejenigen, die durch die Stigmatpunkte gehen. Die Stigmatpunkte sind bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta_{13}^2-\beta_{14}^2}{\beta_{11}+p}+\frac{\beta_{23}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{22}+p}+\beta_{33}-\beta_{44}=0 \\ \text{bzw.}\quad \frac{\beta_{13}^2-\beta_{23}^2}{\beta_{33}+p'}+\frac{\beta_{14}^2-\beta_{24}^2}{\beta_{44}+p'}+\beta_{11}-\beta_{22}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (146).$$

Wir schreiben unsere Gleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} n\,x_1 &= \beta_{11}\zeta_1+\beta_{13}\zeta_3, & n\,x_2 &= \beta_{22}\zeta_2+\beta_{24}\zeta_4 \\ n'x_3 &= -\beta_{13}\zeta_1+\beta_{33}\zeta_3, & n'x_4 &= -\beta_{24}\zeta_2+\beta_{44}\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (147).$$

Wir sehen, die Meridianstrahlen hängen nur von meridionalen Komponenten, die Sagittalstrahlen nur von sagittalen Komponenten ab. Damit haben wir für Orthogonalsysteme die Verallgemeinerung eines Satzes von Lippich, der in der Literatur leider oft auch auf Nichtorthogonalsysteme angewendet wurde, für die er falsch ist.

Satz von Lippich[1]). Man kann in Orthogonalsystemen den Verlauf eines windschiefen Nachbarstrahls in folgender Weise erhalten. Man projiziere den Strahl auf Meridional- und Sagittalebene und bestimme die Bilder dieser Projektionen. Diese Bilder sind die Projektionen des Bildstrahls auf Meridional- und Sagittalebene.

Die Boegeholdsche Gleichung zerfällt hier in zwei bilineare Gleichungen

$$(\beta_{11}+p)(\beta_{33}+p')+\beta_{13}^2=0, \quad (\beta_{22}+p)(\beta_{44}+p')+\beta_{24}^2=0 \quad \ldots \quad (148).$$

Ein beliebiger Meridianstrahl schneide den Hauptstrahl objektseitig in der Entfernung p bzw. p' vom Koordinatenanfangspunkt. Wir haben

$$(\beta_{11}+p)\zeta_1^0+\beta_{13}\zeta_3^0=0=-\beta_{13}\zeta_1^0+(\beta_{33}+p')\zeta_3^0 \quad \ldots \quad (149).$$

Die zugehörige meridionale Winkelvergrößerung wird also

$$\gamma_m'=-\frac{\beta_{11}+p}{\beta_{13}}=\frac{\beta_{13}}{\beta_{33}+p'} \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

analog für die Sagittalstrahlen

$$\gamma_s'=-\frac{\beta_{22}+p}{\beta_{24}}=\frac{\beta_{24}}{\beta_{44}+p'} \quad \ldots\ldots \quad (150a).$$

Die Lateralvergrößerung ergibt sich zu

$$\beta_m'=\frac{n}{n'w_n'}=-\frac{n\beta_{13}}{n'(\beta_{11}+p)}=\frac{n(\beta_{33}+p')}{n'\beta_{13}}, \quad \beta_s'=\frac{n}{n'\gamma s'}=-\frac{n\beta_{24}}{n'(\beta_{22}+p)}=\frac{n(\beta_{44}+p')}{n'\beta_{24}} \quad (151).$$

Insbesondere erhalten wir für die Brennweiten

$$n'f_1=\beta_{13}=-nf_1', \quad n'f_2=\beta_{24}=-nf_2' \quad \ldots\ldots \quad (152).$$

Zum Schluß fragen wir, ob die Abbildung in den evtl. vorhandenen Stigmatpunkten verzerrt oder unverzerrt ist.

Es sei mindestens ein endlicher Stigmatpunkt vorhanden. Wir legen unser Koordinatensystem objekt- und bildseitig in diesen Stigmatpunkt.

Dann muß in beiden Gl. (148) aus $p=0$, $p'=0$ folgen, also

$$\beta_{11}\beta_{33}+\beta_{13}^2=0, \quad \beta_{22}\beta_{44}+\beta_{24}^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (153)$$

oder

$$p_m'=-\frac{\beta_{33}p}{p+\beta_{11}}, \quad p_s'=-\frac{\beta_{44}p}{p+\beta_{22}} \quad \ldots\ldots \quad (154).$$

Die Entfernung des evtl. zweiten Stigmatpunktes ergibt sich aus (154) zu

$$p=\frac{\beta_{11}\beta_{44}-\beta_{22}\beta_{33}}{\beta_{33}-\beta_{44}}, \quad p'=\frac{\beta_{11}\beta_{44}-\beta_{22}\beta_{32}}{\beta_{11}-\beta_{22}} \quad \ldots\ldots \quad (155).$$

Er fällt mit dem ersten zusammen nur für

$$\beta_{11}\beta_{44}=\beta_{22}\beta_{33} \quad \ldots\ldots \quad (156),$$

eine Gleichung, die wegen (153) mit (144) gleichbedeutend ist.

Aus (151) ergibt sich für die Verzerrung in den beiden Stigmatpunkten unter Beachtung von (153)

$$\frac{\beta_{m1}'}{\beta s_1'}=\frac{\beta_{13}\beta_{22}}{\beta_{24}\beta_{11}}, \quad \frac{\beta_{m2}'}{\beta s_2'}=\frac{\beta_{13}\beta_{44}}{\beta_{24}\beta_{33}}=\frac{\beta_{24}\beta_{11}}{\beta_{13}\beta_{22}} \quad \ldots\ldots \quad (157).$$

[1]) Lippich sprach obigen Satz (Wiener Denkschrift 1877, **38**) für Brechung eines unendlich dünnen Strahlenbündels an einer Kugelfläche aus. Ein solches System ist für jeden Strahl orthogonal.

D. h. wir haben den zuerst von Abbé bewiesenen Satz:

In Orthogonalsystemen mit zwei Stigmatpunkten ist die Verzerrung in den beiden Fokalpunkten reziprok.

In Orthogonalsystemen mit einem Stigmatpunkt dagegen ist wegen (153), (156) und (157)

$$\frac{\beta_{m1'}}{\beta_{s1'}} = \frac{\beta_{m2'}}{\beta_{s2'}} = \pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (158),$$

d. h. ein zum Hauptstrahl senkrechtes Flächenelement wird unverzerrt oder mit der Verzerrung -1 abgebildet.

9. Die Gaußschen Systeme. Sei jeder Punkt Stigmatpunkt, also

$$\beta_{11} = \beta_{22}, \quad \beta_{33} = \beta_{44}, \quad \beta_{13} = \beta_{24},$$

dann wird

$$\left.\begin{aligned} n\,x_1 &= \beta_{11}\,\zeta_1 + \beta_{13}\,\zeta_3, & n\,x_2 &= \beta_{11}\,\zeta_2 + \beta_{13}\,\zeta_4 \\ n'\,x_3 &= -\beta_{13}\,\zeta_1 + \beta_{33}\,\zeta_3, & n'\,x_4 &= -\beta_{13}\,\zeta_2 + \beta_{33}\,\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (159).$$

Die Boegeholdschen Gleichungen schrumpfen in die eine Gleichung, die »Newtonsche« Gleichung:

$$(\beta_{11} + p)\,(\beta_{33} + p') + \beta_{13}^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (160)$$

zusammen.

Es werden sagittale und meridionale Winkel und Lateralvergrößerung gleich

$$\left.\beta' = -\frac{n\,\beta_{13}}{n'\,(\beta_{11}+p)} = \frac{n\,(\beta_{33}+p')}{n'\,\beta_{13}}, \quad \gamma' = -\frac{\beta_{11}+p}{\beta_{13}} = \frac{\beta_{13}}{\beta_{33}+p'}\right\} \quad \ldots \quad (161)$$

die Brennweite

$$\beta_{13} = n'\,f = -\,n\,f' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (162).$$

Gl. (158) bis (162) enthalten alles, was über die Gaußsche Optik zu sagen ist.

Legen wir z. B. unsere Koordinatenanfangspunkte in die Brennpunkte und nennen die Entfernung eines Punktes vom Brennpunkt z bzw. z', dann wird

$$\beta_{11} = \beta_{33} = 0, \quad p = n\,z, \quad p' = n'\,z',$$

also (159)

$$x_1 = -\,f'\,\zeta_3, \quad x_2 = -\,f'\,\zeta_4, \quad x_3 = f\,\zeta_1, \quad x_4 = -\,f\,\zeta_2 \quad \ldots \quad (163).$$

(160) und (161) geben die klassischen Gleichungen

$$z\,z' = f\,f', \quad \beta' = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}, \quad \gamma' = \frac{z}{f'} = \frac{f}{z'} \quad \ldots\ldots \quad (164).$$

10. Die halbbrennpunktlosen und brennpunktlosen Systeme. Für Systeme, bei denen Strahlen parallel zum Hauptstrahl austreten, versagt die Darstellung mit Hilfe der $\beta_{\iota\varkappa}$.

Nehmen wir z. B. Punktkoordinaten (oder gemischte Koordinaten), so erhalten wir für alle Probleme ganz analoge Lösungen; wir brauchen bloß in alle Formeln statt $\beta_{\iota\varkappa}$ $\alpha_{\iota\varkappa}$, statt der optischen Entfernung p die optische Nähe q, statt der ζ_ι die x_ι, statt der x_ι die ζ_ι einzusetzen.

Der Ausdruck F^*, der über die Anzahl der Orthogonalpunkte entscheidet, wird insbesondere wieder

$$F^* = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 (\alpha_{33} - \alpha_{44})^2\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24} - \\ - (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,(\alpha_{33} - \alpha_{44})\,(\alpha_{13}\,\alpha_{24} - \alpha_{14}\,\alpha_{23})\,(\alpha_{13}\,\alpha_{14} + \alpha_{23}\,\alpha_{24})\,(\alpha_{13}\,\alpha_{23} + \alpha_{14}\,\alpha_{24}) \quad (165).$$

Das System ist orthogonal für

$$\alpha_{14} = \alpha_{23} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (166),$$

Gaußisch, wenn außerdem

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{33} = \alpha_{44}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{24} \quad \ldots\ldots \quad (167)$$

ist. Den Fall des brennpunktlosen Gaußschen Systems wollen wir kurz streifen. Wir wollen hier sogar die Konstanten $\gamma_{\iota\varkappa}$ anwenden.

Es sei

$$\left.\begin{aligned} n\,\zeta_1 &= \gamma_{11}\,x_1 + \gamma_{13}\,\zeta_3, & n\,\zeta_2 &= \gamma_{11}\,x_2 + \gamma_{13}\,\zeta_4 \\ n'\,x_3 &= \gamma_{13}\,x_1 + \gamma_{33}\,\zeta_3, & n'\,x_4 &= \gamma_{13}\,x_2 + \gamma_{33}\,\zeta_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (168).$$

Die umgeformte Boegeholdsche Gleichung gibt

$$(\gamma_{11} + q)\,(\gamma_{33} + p') = \gamma_{13}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (169).$$

Nun soll aus

$$q = 0, \quad p = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

folgen; das ergibt

$$\gamma_{11} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171).$$

Wir wollen außerdem voraussetzen, daß die Koordinatenanfangspunkte $q = \infty$, $p' = 0$ konjugiert sind. Das gibt

$$\gamma_{33} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172),$$

also wird (168) in diesem Falle zu

$$n\,\zeta_1 = \gamma_{13}\,\zeta_3, \quad n\,\zeta_2 = \gamma_{13}\,\zeta_4, \quad n\,x_3 = \gamma_{13}\,x_3, \quad n'\,x_4 = \gamma_{13}\,x_2 \quad . \quad . \quad (173).$$

Die Winkelvergrößerung bzw. Lateralvergrößerung für den Punkt der optischen Nähe q ergibt sich zu

$$\gamma' = \frac{\zeta_3^0}{\zeta_1^0} - \frac{n}{\gamma_{13}}, \qquad \beta' = \frac{x_3^0}{x_1^0} = \frac{\gamma_{13}}{n'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174),$$

d. h. bei einem brennpunktlosen Gaußschen System ist Winkelvergrößerung und Lateralvergrößerung für alle Punkte konstant.

11. Symmetrieeigenschaften. Ausblick. Es sei kurz, ohne die sehr einfache Ableitung erwähnt, daß eine Abbildung, bei der der Hauptstrahl in einer Symmetrieebene liegt, immer eine orthogonale Abbildung ist.

Ist der Hauptstrahl Symmetrieachse, so ist die Abbildung Gaußisch.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß die Mannigfaltigkeit der Abbildungen nicht acht unabhängige Parameter hat, wie es nach Formel (110) erscheinen könnte, sondern nur sechs, da man ohne Aenderung der Abbildung durch Verschiebung des Koordinatensystems zwei der acht Größen, z. B. β_{11} und β_{33} annullieren kann, indem man die Koordinatenanfangspunkte in einen der Bildpunkte des unendlich fernen Punktes legt.

Zum Schluß sei auch ohne Beweis bemerkt, daß im Bereich der Abbildungsgrößen erster Ordnung wirklich jede Abbildung, die unseren mathematischen Forderungen (13a bis c) genügt, optisch realisiert werden kann.

Auch ist man mit geringer Mühe imstande, in jedem praktischen Fall die Koeffizienten β_{lx} zu berechnen und dadurch, ebenso wie in der Gaußschen Optik die Umgebung der Achse eines rotationssymmetrischen Systems, so hier die Abbildung der Umgebung eines beliebigen Strahls zu beherrschen. 984

Die magnetische Leitfähigkeit eines unregelmäßig gestalteten Luftzwischenraumes bei parallelebenem Feld.

Von **HERBERT BUCHHOLZ** in Berlin.

A) Die Aufgabenstellung.

Bei einer großen Zahl elektromagnetischer Apparate, wie bei Relais und ähnlichen Auslösevorrichtungen, wird man bei ihrer Durchrechnung vor die Aufgabe gestellt, die magnetische Leitfähigkeit des Luftraumes zwischen zwei nach Abb. 1 gelagerten Eisenkernen A und B anzugeben. Dabei läßt sich das Magnetfeld als ein parallelebenes Potentialfeld ansehen.

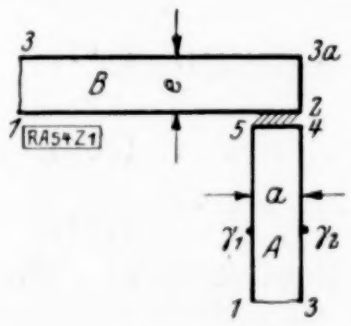


Abb. 1.

In Rücksicht auf die zwischen γ_1 γ_2 und 54 liegende Magnetspule des Kernes A kann auf den Oberflächen von A und B die folgende Potentialverteilung angenommen werden: Auf der Oberfläche von B ist das magnetische Potential durchweg gleich Null, auf der Oberfläche von A ist es ebenfalls Null zwischen dem unendlich fernen Punkt 1 und γ_1 und dem unendlich fernen Punkt 3 und γ_2. Dagegen herrscht auf dem Kern A zwischen den Punkten γ_1 54 γ_2 ein von Null verschiedenes konstantes Potential. Streng genommen erzeugt allerdings die Stromspule auf dem Kern A zwischen γ_1 5 und γ_2 4 ein veränderliches Potential, das angenähert nach γ_1 und γ_2 hin linear gegen Null abfällt. Im vorliegenden Fall aber, wo es nur auf den magnetischen Fluß zwischen A und B ankommt, ist das nebensächlich, da derjenige Teil dieses Flusses, der von den tiefer liegenden Teilen von A nach B übertritt, nur klein ist im Vergleich z. B. zu dem

Fluß in dem schmalen Luftspalt selbst. Es ist daher die Annahme eines konstanten Potentials auf dem oben näher gekennzeichneten Teil von A zulässig. Bei der hier geschilderten Auffassung läßt sich die Aufgabe wie in ähnlichen Fällen [1]) nach der Methode der konformen Abbildung behandeln.

B) Der endgültige Abbildungsbereich.

Für die rechnerische Behandlung der Aufgabe ist es zweckmäßig, noch eine weitere unwesentliche Vereinfachung vorzunehmen. Sie betrifft das Profil des Körpers B. Der zum Kern A senkrecht stehende Kern B hat in allen praktischen Fällen eine endliche Höhe e, Abb. 1. Die Dichte derjenigen Kraftlinien, die sich auf der Fläche 2 3a bis zum Punkt 3a des Kerns B hinaufziehen, ist dort bei den üblichen, für e vorkommenden Abmessungen und bei nicht zu großen Luftspalten sehr viel geringer als im Luftspalt selbst. Es wird unter solchen Verhältnissen auf den Gesamtwert der magnetischen Leitfähigkeit wenig ausmachen, wie der Verlauf der Kante 2 3a über 3a hinaus gegenüber den wirklichen Verhältnissen gewählt wird. Für die Rechnung kann deshalb die bei weitem bequemere Annahme gemacht werden, daß sich die Kante 2 3a in gerader Verlängerung über 3a hinaus bis ins Unendliche erstreckt. Die Größe des dadurch entstehenden Fehlers wird sich später eingrenzen lassen. Die Konturen der Eisenkerne A und B, die für die Rechnung endgültig zugrunde gelegt werden sollen, ergeben sich danach entsprechend Abb. 2.

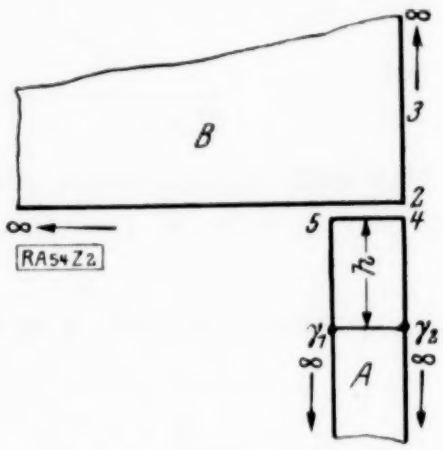


Abb. 2.

C) Die mathematische Formulierung und der Behandlungsgang der Aufgabe.

Durch die bisherigen Vereinfachungen ist es möglich geworden, die Bestimmung des zwischen A und B übertretenden Kraftflusses durch Anwendung der Methode der konformen Abbildung erfolgreich in Angriff zu nehmen. Ueber die Grenzbedingungen, denen das magnetische Potential Φ zu genügen hat, wurde schon andeutungsweise gesprochen. Längs der Oberfläche von B soll überall $\Phi = 0$ sein, ebenso längs der Oberfläche von A zwischen den Punkten γ_1, γ_2 und den beiden unendlich fernen Punkten 1 und 3. Dagegen soll Φ längs γ_1 54 γ_2 den konstanten Wert V annehmen.

Außer diesen Grenzbedingungen für Φ hat das magnetische Potential in dem Raum zwischen den beiden Kernen der bekannten Laplaceschen Gleichung $\Delta\Phi(xy) = 0$ zu genügen. Mit Rücksicht auf diese Gleichung kann Φ aufgefaßt werden als der reelle Teil einer analytischen Funktion $\chi(z) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Es kommt dann darauf an,

a) eine Funktion $z = f(t)$ zu finden, die den Bereich der z-Ebene außerhalb der Eisenkörper A und B, Abb. 2, auf die obere t-Halbebene konform abbildet (Abschnitt D) und

b) eine Funktion $\chi = \Phi + i \cdot \Psi = g(t)$ zu bestimmen, die die konforme Abbildung dieser oberen t-Halbebene auf einen zur Ψ-Achse parallelen Streifen der χ-Ebene vermittelt (Abschnitt E).

Wie im Anschluß an die Lösung dieser beiden Abbildungsaufgaben die einzelnen Teilflüsse zwischen den verschiedenen Begrenzungsflächen der beiden Kernstücke A und B und damit auch die ihnen entsprechenden magnetischen Leitfähigkeiten bestimmt werden können, wird aus dem Abschnitt F ersichtlich sein.

D) Die Bestimmung der Abbildungsfunktion des z-Bereiches.

1. Die Integraldarstellung für z. Nach dem Satz der Zuordnung der Ränder geht bei der konformen Abbildung zweier Bereiche aufeinander der Rand des einen Bereiches in den Rand des anderen Bereiches über. Demzufolge muß die konforme Abbildung des außerhalb der schraffierten Fläche liegenden Bereiches der z-Ebene (Abb. 3)

[1]) W. Cramp und N. I. Calderwood, The Calculation of Air-space Flux, Journ. of El. Eng., London 1923, Bd. 61, S. 1001. — I. F. H. Douglas, The Reluctance of some irregular magnetic Fields, Proc. of the Am. Inst. of El. Eng., Bd. 34, S. 1067.

auf die obere t-Halbebene so vorgenommen werden, daß der Begrenzung des in der z-Ebene liegenden Bereiches die reelle Zahlenachse der t-Ebene entspricht.

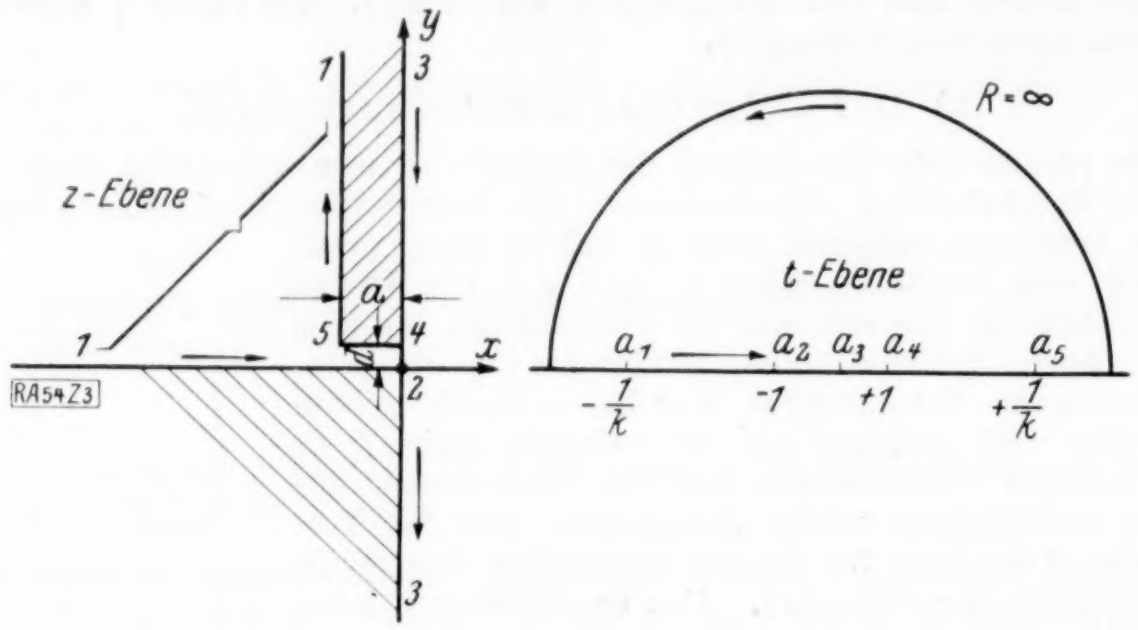


Abb. 3.

Der Bereich der z-Ebene, um dessen Abbildung es sich im vorliegenden Falle handelt, ist ein uneigentliches Polygon mit den drei, im Endlichen gelegenen Ecken 2, 4 und 5 und den beiden unendlichen fernen Ecken 1 und 3. Um bei den zuletzt genannten Polygonpunkten 1 und 3 deutlich zu erkennen, daß es sich bei diesen trotz der scheinbaren Divergenz der zugehörigen Kanten um Ecken handelt, denke man sich für einen Augenblick den Bereich der z-Ebene stereografisch auf die Kugeloberfläche projiziert. Da bei der konformen Abbildung auch der Umlaufsinn erhalten bleibt, so müssen die fünf Punkte $a_1 \ldots a_5$, die in derselben Reihenfolge den fünf Ecken 1 . . . 5 des Polygons der z-Ebene entsprechen sollen, auf der reellen t-Achse so aufeinander folgen, daß in beiden Fällen der umlaufene Bereich zur Linken liegt. Die Lage der fünf Punkte auf der t-Achse kann nicht für alle fünf Punkte willkürlich festgesetzt werden. Vielmehr lehrt eine genauere Betrachtung, daß nur für drei Punkte freie Wahl besteht. Sie möge so getroffen werden, daß $a_1 = -1/k$, $a_2 = -1$, $a_4 = +1$ und $a_5 = +1/k$ ist. Da k hierin noch unbestimmt gelassen werden soll, so entspricht diese Festsetzung tatsächlich nur einer Verfügung über drei Punkte. Unbekannt ihrer Größe nach bleibt die Abszisse des Punktes a_3. Jedoch steht fest, daß jedenfalls $|a_3| < 1$ sein muß.

Die Differentialgleichung für die gesuchte Abbildungsfunktion läßt sich mit Hilfe des bekannten Satzes von Schwarz-Christoffel und seiner Erweiterung auf uneigentliche Polygone ohne erhebliche Schwierigkeiten aufstellen. Besondere Beachtung hinsichtlich der Wahl der Exponenten verlangen lediglich die beiden unendlich fernen Punkte 1 und 3 des Polygons. Man erhält für die Schwarzsche Derivierte nach ihrem dementsprechend variierten Bildungsgesetz den Ausdruck:

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot i \cdot \frac{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k\,t)}}{(t-a_3)^2 \cdot (1+k\,t)^{3/2}} = A \cdot i \cdot F(t), \qquad (i = \sqrt{-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin A eine vorläufig noch unbekannte, reelle Konstante sein soll. Eine einfache Kontrollrechnung zeigt, daß durch (1) jedenfalls der Richtungssinn der einzelnen Begrenzungslinien des Bereiches der z-Ebene richtig wiedergegeben wird. Für einen Umlauf um die obere t-Halbebene längs der reellen Achse wird nämlich nach (1) $\arg dz = \pi/2 + \arg F(t)$. Es ist aber

für $-\infty < t < -1/k$	$\arg F(t) = -2\,\pi \equiv 0$	$\arg dz = +1/2 \cdot \pi$,
für $-1/k < t < -1$	$\arg F(t) = -\pi/2$	$\arg dz = 0$,
für $-1 < t < a_3$	$\arg F(t) = -\pi$	$\arg dz = -1/2 \cdot \pi$,
für $a_3 < t < +1$	$\arg F(t) = +\pi$	$\arg dz = +3 \cdot \pi/2$,
für $+1 < t < +1/k$	$\arg F(t) = 1/2 \cdot \pi$	$\arg dz = +\pi$,
für $+1/k < t < +\infty$	$\arg F(t) = 0$	$\arg dz = +\pi/2$.

Die Richtungen der Linienelemente dz entsprechen also in den einzelnen Abschnitten der reellen t-Achse tatsächlich dem Verlauf der Begrenzungslinien des z-Bereichs. Substituiert

man in (1) $-1/t_1$ für t, um das Verhalten von dz/dt im unendlich fernen Punkt der t Ebene feststellen zu können, so bleibt dz/dt für $t_1 = 0$ endlich. Dem unendlich fernen Punkte der t Ebene entspricht also keine Ecke des Bereiches der z-Ebene, wie das in der Wahl der fünf Punkte $a_1 \ldots a_5$ auf der t-Achse auch schon zum Ausdruck gebracht worden ist.

Mit Rücksicht auf die in Abb. 3 getroffene Festsetzung der Lage des Nullpunktes folgt aus (1) durch Integration unter Benutzung der Abkürzung

$$X(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als vorläufiger Ausdruck für z

$$z = A \cdot i \cdot \int_{-1}^{t} \frac{(1 - t^2)(1 - k\,t)}{(t - a_3)^2 (1 + k\,t) \sqrt{X(t)}} \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die weitere Aufgabe besteht darin, die Unbekannten k, a_3 und A in (3) aus den beiden Bedingungen zu bestimmen, daß $z = id$ für $t = +1$ und $z = id - a$ für $t = +1/k$ sein muß. Dazu ist zuerst notwendig, das Integral umzuformen.

2. Aufspaltung des Integralausdruckes für z. Durch Partialbruchzerlegung läßt sich z sofort in der Form schreiben:

$$z = A \cdot i \cdot \left[\int_{-1}^{t} \frac{dt}{\sqrt{X(t)}} + b_1 \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(1 + k\,t)\sqrt{X(t)}} + b_2 \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(t - a_3)\sqrt{X(t)}} + b_3 \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(t - a_3)^2 \cdot \sqrt{X(t)}} \right] \quad (3a)$$

mit den folgenden Werten für b_1, b_2 und b_3:

$$b_1 = -2 \cdot \frac{1 - k^2}{(1 + a_3 k)^2}, \qquad b_2 = \frac{2\,a_3^2\,k}{1 + a_3 k} - \frac{2\,(a_3 + k)}{(1 + a_3 k)^2}, \qquad b_3 = \frac{(1 - a_3^2)(1 - a_3^2 k^2)}{(1 + a_3 k)^2} \quad (4).$$

Das erste Integral in der Klammer von (3a) ist ein elliptisches Normalintegral der ersten Gattung.

Das zweite Integral läßt sich durch Anwendung einer bekannten Rekursionsformel [1]) in ein elliptisches Normalintegral zweiter Gattung überführen:

$$(1 - k^2) \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(1 + k\,t)\sqrt{X(t)}} = \frac{k\sqrt{X(t)}}{1 + k\,t} + \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Für das dritte Integral ergibt sich nach einigen leichten Zwischenrechnungen die Beziehung:

$$\int_{-1}^{t} \frac{dt}{(t - a_3)\sqrt{X(t)}} = \int_{-1}^{t} \frac{t \cdot dt}{(t^2 - a_3^2)\sqrt{X(t)}} - \frac{1}{a_3} \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{\sqrt{X(t)}} - \frac{1}{a_3} \cdot \int_{-1}^{t} \frac{t^2 \cdot dt}{(a_3^2 - t^2)\sqrt{X(t)}} \quad . \quad . \quad (6).$$

Es geht also über in die Summe eines trigonometrischen Integrals und zweier elliptischer Integrale der ersten und dritten Gattung.

Für das vierte Integral endlich führt die Anwendung der schon oben erwähnten Rekursionsformel zu der Zerlegung:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(t - a_3)^2 \sqrt{X(t)}} = &- \frac{\sqrt{X(t)}}{(t - a_3) X(a_3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{X'(a_3)}{X(a_3)} \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(t - a_3)\sqrt{X(t)}} + \\ &+ \frac{1 - a_3^2 k^2}{X(a_3)} \cdot \int_{-1}^{t} \frac{dt}{\sqrt{X(t)}} - \frac{1}{X(a_3)} \cdot \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} \cdot dt \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Aus dem vierten Integral entstehen also das bereits behandelte dritte Integral und zwei elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung. Wird vorläufig zur Abkürzung geschrieben

$$J_1(t) = \int_{-1}^{t} \frac{dt}{\sqrt{X(t)}}, \quad J_2(t) = \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} \cdot dt, \quad J_3(t) = \int_{-1}^{t} \frac{t^2 \cdot dt}{(a_3^2 - t^2)\sqrt{X(t)}}, \quad J_4(t) = \int_{-1}^{t} \frac{t \cdot dt}{(t^2 - a_3^2)\sqrt{X(t)}} \quad (8),$$

[1]) Siehe M. Krause, Die Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1912 (Samml. math. phys. Schriften), S. 172.

so läßt sich nach Zusammenfassung der verschiedenen Glieder in (3a) die Gleichung für z in der Gestalt schreiben:

$$z = \frac{i\,A}{(1+a_3\,k)^2}\cdot\left[c_1\cdot J_1(t) - 3\cdot J_2(t) + c_3\cdot J_3(t) + c_4\cdot J_4(t) - \frac{1+3\,t\,k-2\,a_3\,k}{(t-a_3)(1+t\,k)}\cdot\sqrt{X(t)}\right] \quad (3b).$$

Hierin bedeuten:

$$c_1 = 3 + 2\,\frac{k}{a_3} - k^2, \qquad c_2 = 1 - k^2 + 2\,\frac{k}{a_3}\cdot(1-a_3{}^2), \qquad c_4 = -\,a_3\cdot b_3 \quad (9).$$

3. Einführung der elliptischen Funktionen und der Thetafunktionen an Stelle der drei elliptischen Integrale. Es werde gesetzt:

$$t = \mathrm{sn}\,(u,k) = \mathrm{sn}\,u, \qquad k\cdot\mathrm{sn}\,(\alpha,k) = k\cdot\mathrm{sn}\,\alpha = \frac{1}{a_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Dann wird nach einfachen Zwischenrechnungen

$$J_1(t) = u + K, \qquad J_2(t) = E + \frac{E}{K}\cdot u + Z(u), \qquad J_3(t) = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}\cdot[\Pi(u,\alpha) + \Pi(K,\alpha)] \quad (11).$$

In (11) ist $Z(u)$ die Jacobische Transzendente [1]), die im wesentlichen übereinstimmt mit der ersten logarithmischen Ableitung der Thetafunktion ϑ_0, $\Pi(u,k,\alpha)$ oder kürzer $\Pi(u,\alpha)$ das Zeichen für das elliptische Normalintegral dritter Gattung mit dem Modul k und dem Argument α in der Jacobischen Definition. K und E bedeuten in bekannter Weise die beiden vollständigen elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul k.

Der oberen t-Halbebene als dem Variabilitätsbereich von t entspricht für die Hilfsvariable u nach Abb. 4 das Rechteck mit den Ecken $+K$, $+K+iK'$, $-K+iK'$ und $-K$, worin K' das vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung für den zu k komplementären Modul $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist. Die durch einzelne Ziffern näher gekennzeichneten Punkte des Rechteckes der u-Ebene entsprechen den durch die gleichen Ziffern bezeichneten Punkten der t-Ebene. Da a_3 und k beide kleiner sind als 1, so ist nach der Definitionsgleichung (10) $\mathrm{sn}\,\alpha > 1$ und reell. Solche Werte nimmt aber die Funktion $\mathrm{sn}\,u$ nur an für ein Argument u der Form $u_0 + iK'$ mit reellem u_0. Es empfiehlt sich daher, statt α die neue Unbekannte α_1 einzuführen gemäß der Gleichung

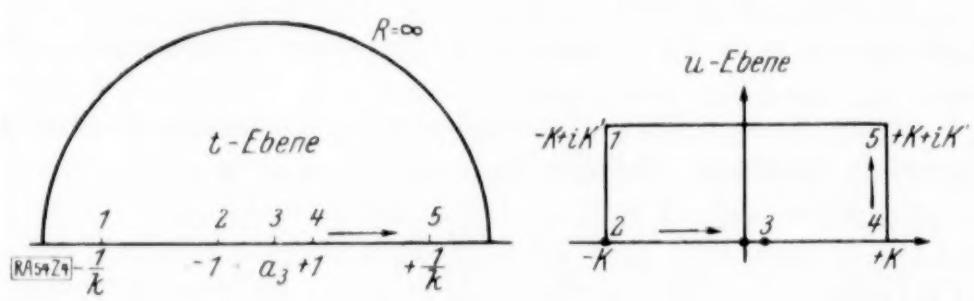


Abb. 4.

$$\alpha = \alpha_1 + iK', \qquad \mathrm{sn}\,\alpha = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1}, \qquad a_3 = \mathrm{sn}\,\alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

α_1 liegt nach Abb. 4 auf der reellen Achse der u-Ebene zwischen $-K$ und $+K$. Es ist dann auch ratsam, in dem Ausdruck für $I_3(t)$, Gl. (11), statt α die neue Unbekannte α_1 einzusetzen. Es ist aber, wenn $v = u : 2K$, $\beta_1 = \alpha_1 : 2K$ diejenigen Argumente der Thetafunktionen sind, die den Argumenten u und α_1 der elliptischen Funktionen entsprechen [2]),

$$\Pi(u,\alpha) = \Pi(u,\alpha_1 + iK') = u\cdot\left[Z(\alpha_1) - i\cdot\frac{\pi}{2K} + \frac{\mathrm{cn}\,\alpha_1\cdot\mathrm{dn}\,\alpha_1}{\mathrm{sn}\,\alpha_1}\right] + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{\vartheta_0(v-\beta_1-\tau/2)}{\vartheta_0(v+\beta_1+\tau/2)} \quad (13)$$

und daher wird endgültig

$$J_3(t) = -\frac{\mathrm{sn}\,\alpha_1}{\mathrm{cn}\,\alpha_1\cdot\mathrm{dn}\,\alpha_1}\cdot(u+K)\cdot\left[Z(\alpha_1) - i\cdot\frac{\pi}{2K} + \frac{\mathrm{cn}\,\alpha_1\cdot\mathrm{dn}\,\alpha_1}{\mathrm{sn}\,\alpha_1}\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,\alpha_1}{\mathrm{cn}\,\alpha_1\cdot\mathrm{dn}\,\alpha_1}\cdot\ln\frac{\vartheta_0(v-\beta_1-\tau/2)}{\vartheta_0(v+\beta_1+\tau/2)} \quad (11a).$$

4. Die Auswertung des Integrals $I_4(t)$. Die Auswertung des Integrals $I_4(t)$ werde zunächst beschränkt auf solche reellen Werte von t, für die $-1 < t < -a_3$ ist. Es ist dann möglich, nacheinander die folgenden Substitutionen durchzuführen: $t = \sin\varphi$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \sin 2\beta : (k + \cos 2\beta)$ und $\cos 2\beta = y$.

Man erhält auf diese Weise mit $a_3 = 1 : k\,\mathrm{sn}\,\alpha$, wenn unter dem Logarithmus der Hauptwert verstanden wird,

$$\int\frac{t\cdot dt}{(t^2-a_3{}^2)\sqrt{X(t)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k\,\mathrm{sn}^2\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\alpha}\cdot\ln\frac{1+k\,\mathrm{sn}^2\,\alpha\cdot y - \mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha}{1+k\,\mathrm{sn}^2\,\alpha\cdot y + \mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\alpha}.$$

---

[1]) S. O. Schlömilch, Compendium d. höheren Analysis, Bd. 2, S. 460 (Gl. 150).
[2]) S. O. Schlömilch, a. a. O., S. 466 Gl. (167).

Geht man von y zu $\sin\varphi = t$ zurück und setzt noch wie eben $t = \mathrm{sn}\, u$, so erhält man schließlich nach einigen Zwischenrechnungen bei gleichzeitigem Uebergang von α zu α_1 den Ausdruck:

$$\int_{-1}^{t} \frac{t \cdot dt}{(t^2 - a_3^2)\sqrt{X(t)}} = \frac{1}{\mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_1} \cdot \ln\left(\frac{\mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{dn}\,u - \mathrm{dn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{cn}\,u}{k' \cdot \sqrt{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \alpha_1}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Der Voraussetzung gemäß gilt diese Beziehung nur für $-1 < t < -a_3$.

Um einen für alle in Frage kommenden Werte von t gültigen Ausdruck für $I_4(t)$ zu erhalten, werde vorerst unabhängig von der soeben angestellten Berechnung die logarithmische Transzendente

$$f(u, \alpha_1) = \ln\left(\frac{\mathrm{dn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{cn}\,u - \mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{dn}\,u}{k' \cdot \sqrt{\mathrm{sn}^2 \alpha_1 - \mathrm{sn}^2 u}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

untersucht und im besonderen festgestellt, wie sich diese Funktion verhält, wenn man, von $u = 0$ ausgehend, das Rechteck der u-Ebene in Abb. 4 umläuft. Für die Umgebung des Ursprungs $u = 0$ soll in (15) die Wurzel mit positiven Vorzeichen und von dem Logarithmus der Hauptwert genommen werden. Dann wird speziell für $u = 0$

$$f(0, \alpha_1) = \ln \frac{\mathrm{dn}\,\alpha_1 - \mathrm{cn}\,\alpha_1}{k'\,\mathrm{sn}\,\alpha_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a).$$

Dieser Wert ist stets negativ und reell. Für $u = +\alpha_1$ wird der Logarithmand null. Der Punkt $u = \alpha_1$ werde deshalb längs eines kleinen Halbkreises mit dem Radius ϱ umlaufen, der in der oberen u-Halbebene liegt. Nach einem halben Umlauf um diesen Punkt bekommt der Logarithmus die imaginäre Komponente $-\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot i$. Für Werte $+\alpha_1 \leqq u \leqq +K$ wird demnach

$$f(u, \alpha_1) = \ln \frac{\mathrm{dn}\,u \cdot \mathrm{cn}\,\alpha_1 - \mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_1}{k' \cdot \sqrt{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \alpha_1}} - \frac{1}{2}\pi i\,, \qquad (+\alpha_1 \leqq u \leqq +K) \quad . \quad . \quad (15\beta).$$

In diesem Ausdruck kann ohne weiteres $u = +K$ genommen werden. Mithin gilt

$$f(+K, \alpha_1) = -\frac{1}{2}\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15b).$$

Für solche Werte von u, die zwischen $u = +K$ und $u = iK' + K$ liegen, kann gesetzt werden $u = K + iu_1$ mit reellem u_1. Unter Berücksichtigung der bekannten Transformationsgleichungen [1]) für elliptische Funktionen mit dem Argument $K + iu_1$ wird zunächst

$$f(K + iu_1, \alpha) = \ln \frac{\mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{cn}\,(u_1, k') + i \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{sn}\,(u_1, k')}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 \alpha_1 \cdot \mathrm{dn}^2 (u_1, k')}} - \frac{1}{2}\pi i\,.$$

Es ist aber $\mathrm{cn}^2 \alpha_1 \cdot \mathrm{cn}^2 (u_1, k') + \mathrm{dn}^2 \alpha_1 \cdot \mathrm{sn}^2 (u_1, k') = 1 - \mathrm{sn}^2 \alpha_1 \cdot \mathrm{dn}^2 (u_1, k')$. Der Absolutwert des Logarithmanden bleibt daher konstant gleich 1, und es wird endgültig

$$f(K + iu_1, \alpha) = i \cdot \left[-\frac{1}{2}\pi + \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{dn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{sn}\,(u_1, k')}{\mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{cn}\,(u_1, k')}\right)\right], \qquad (0 \leqq u_1 \leqq K') \quad (15\gamma).$$

Für $u_1 = K$ wird speziell

$$f(K + iK', \alpha_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15c).$$

Für Werte von u zwischen iK' und $K + iK'$ sei $u = u_2 + iK'$. Es läßt sich dann nach einigen Umformungen schreiben

$$f(u_2 + iK', \alpha_1) = \ln\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_2 \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_1 - k \cdot \mathrm{cn}\,u_2 \cdot \mathrm{cn}\,\alpha_1}{k' \cdot \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2^2 \cdot \mathrm{sn}^2 \alpha_1}}\right) \quad (0 \leqq |u_2| \leqq K) \quad . \quad . \quad (15\delta).$$

Entsprechend wird

$$f(iK', \alpha_1) = \ln\left(\frac{\mathrm{dn}\,\alpha_1 - k\,\mathrm{cn}\,\alpha_1}{k'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15d).$$

In ganz genau der gleichen Weise kann die Behandlung von (15) für einen Weg von $u = 0$ aus über $u = -K$ nach $u = iK'$ durchgeführt werden. Es wird genügen, wenn an dieser Stelle hierfür nur kurz die Gleichungen angeschrieben werden, die den eben mitgeteilten entsprechen. Zunächst ist

$$f(u, \alpha_1) = \ln\left(\frac{\mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{dn}\,u - \mathrm{dn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{cn}\,u}{k' \cdot \sqrt{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \alpha_1}}\right) + \tfrac{1}{2}\pi i \quad (-K \leqq u_1 \leqq -\alpha_1) \quad (15\beta_1).$$

$$f(-K, \alpha_1) = +\tfrac{1}{2}\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15b_1).$$

[1]) S. M. Krause, a. a. O., S. 53.

Für Werte zwischen $-K$ und $-K+iK'$ gilt

$$f(-K+iu_1, \alpha_1) = i\cdot\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{dn}\alpha_1\cdot\operatorname{sn}(u_1 k')}{\operatorname{cn}\alpha_1\cdot\operatorname{cn}(u_1 k)}\right] \quad (0 \leqq u_1 \leqq K') \quad . \quad (15\gamma_1)$$

und damit

$$f(-K+iK', \alpha_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\mathfrak{c}_1).$$

Zwischen $-K+iK'$ und iK' besteht dieselbe Gl. (15γ) wie vordem.

Mit Hilfe der soeben betrachteten logarithmischen Transzendenten $f(u,\alpha_1)$ läßt sich nun auch sofort eine für alle in Frage kommenden Werte von t oder u gültige Darstellung des Integrals $I_4(t)$ geben. Bildet man nämlich aus $f(u,\alpha_1)$ die Funktion

$$[f(u,\alpha_1) - {}^1/_2\,\pi i] : \operatorname{cn}\alpha_1\cdot\operatorname{dn}\alpha_1,$$

so hat diese Funktion in dem Bereich $-K \leqq u \leqq -\alpha_1$ entsprechend dem Bereich $-1 \leqq t \leqq -a_3$ nach $(15\beta_1)$ und (14) genau denselben Wert wie das Integral $J_4(t)$ in diesem Bereich. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung stimmen dann die in beiden Fällen ausgewählten Zweige beider Funktionen auch in dem ganzen, in Betracht gezogenen Bereich überein, und es gilt durchweg

$$J_4(t) = \int_{-1}^{t} \frac{t\cdot dt}{(t^2-a_3^2)\sqrt{X(t)}} = \frac{1}{\operatorname{cn}\alpha_1\cdot\operatorname{dn}\alpha_1}\cdot[f(u,\alpha_1) - {}^1/_2\,\pi i] \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

5. Der vollständige Ausdruck für die Abbildungsfunktion z in Abhängigkeit von u. Die Gl. (3b, 11, 11a und 16) gestatten nunmehr ohne weiteres, im Verein mit (9) z allein in Abhängigkeit von u auszudrücken. Eine ganze Reihe von Gliedern kann dabei zusammengefaßt werden. Zur Abkürzung werden noch zweckmäßig die folgenden Größen eingeführt:

$$R = k'^2\,\frac{\operatorname{sn}\alpha_1}{\operatorname{cn}\alpha_1\cdot\operatorname{dn}\alpha_1} + 2k\cdot\frac{\operatorname{cn}\alpha_1}{\operatorname{dn}\alpha_1} \quad (17) \qquad r = 2(1+k\operatorname{sn}\alpha_1) - 3\cdot\frac{E}{K} - R\cdot Z(\alpha_1) \quad (18)$$

$$C_1 = rK + R\cdot\pi i \quad . \quad . \quad (19\,\mathbf{a}) \qquad C_2 = r + R\cdot\frac{\pi i}{2K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19\,\mathrm{b}).$$

Mit diesen neu definierten Konstanten schreibt sich

$$z = \frac{iA}{(1+k\operatorname{sn}\alpha_1)}\cdot 2\Big[C_1 + u\cdot C_2 - 3\cdot Z(u) + \operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u\cdot\frac{1-2k\operatorname{sn}\alpha_1+3k\operatorname{sn}u}{(1+k\operatorname{sn}u)(\operatorname{sn}\alpha_1-\operatorname{sn}u)} -$$
$$- R\cdot\Big\{{}^1/_2\cdot\ln\frac{\vartheta_0(v-\beta_1-\tau/2)}{\vartheta_0(v+\beta_1+\tau/2)} + f(u,\alpha_1)\Big\}\Big] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Dieser Ausdruck möge vorläufig nur daraufhin kontrolliert werden, ob er tatsächlich in den vorgeschriebenen Punkten der u-Ebene Nullstellen und Pole hat. Wie es sein muß, wird $z=0$ für $u=-K$, $v=-{}^1/_2$. Für $u=-K+iK'$, $v=-{}^1/_2+\tau/2$ bleiben alle Glieder bis auf das letzte Glied der Klammer endlich. Es wird daher z auch unendlich in Uebereinstimmung mit der eingangs aufgestellten Forderung. Ebenso wächst z, wie es nötig ist, über alle Grenzen, wenn $u\to\alpha_1$ geht. Das ist einmal der Fall wegen des vorletzten Klammergliedes, dann aber auch wegen der beiden Glieder, die in der geschweiften Klammer stehen. Diese beiden Glieder werden aber auch im Gegensatz zum vorletzten Glied in der eckigen Klammer unendlich für $u=-\alpha_1$, was für z nicht der Fall sein soll. Diese Unstimmigkeit wird nur verschwinden, falls sich aus den übrigen, noch zu erfüllenden Bedingungen der Aufgabe ergeben sollte, daß $R=0$ sein muß.

6. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für α_1 und k. Der endgültige Ausdruck für z. In dem Ausdruck für z ist bisher unberücksichtigt geblieben, daß nach Abb. 3 $z=id$ für $t=+1$ und $z=id-a$ für $t=+1/k$ sein muß. Auf die Hilfsvariable u übertragen, lautet die erste Forderung

$$z = id \quad \text{für} \quad u = K.$$

Es ist aber $Z(+K)=0$, $\operatorname{cn}(+K)=0$, $f(+K,\alpha_1) = -{}^1/_2\cdot\pi\cdot i$. Das Glied mit dem Logarithmus verschwindet, und es wird mithin

$$id = \frac{iA}{(1+k\operatorname{sn}\alpha_1)^2}\,[2rK + 2i\pi R] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Die zweite Forderung besagt, daß gilt

$$z = id - a \quad \text{für} \quad u = +K + iK'.$$

Für $u = K + iK'$ ist jedoch[1]) $Z(K+iK') = -\frac{i\pi}{2K}$, $f(K+iK', \alpha_1) = 0$

$$\ln \frac{\vartheta_0(1/2 - \beta_1)}{\vartheta_0(1/2 + \beta_1 + \tau)} = 2\pi i\beta_1 + \pi i\tau = 2\pi i\beta_1 - \pi \cdot \frac{K'}{K}.$$

Damit erhält man aus (20), wenn noch die entstehende Gleichung von der Gl. (21) subtrahiert wird,

$$a = \frac{iA}{(1+k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1)^2} \cdot \left[-1/2\,\pi i R - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi i}{K} - r i K' + R \cdot \pi i \beta_1\right] \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Bildet man aus (21) und (22) den Quotienten, so ergibt sich

$$\frac{d}{a} = \frac{2rK + 2\pi i R}{rK' + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{K} + 1/2\,\pi R - \pi R \cdot \beta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Dieser Bruch ist aber dann und nur dann reell, wenn $R = 0$ ist. Damit ist zugleich die Forderung erfüllt, die sich soeben als notwendig erwiesen hatte, damit die Gleichung für z nicht bei $u = -\alpha_1$ einen Pol hat. Die erste Bestimmungsgleichung für k und α_1 liegt also vor in der Bedingung

$$R = k'^2 \cdot \frac{\mathrm{sn}\,\alpha_1}{\mathrm{cn}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{dn}\,\alpha_1} + 2k \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha_1}{\mathrm{dn}\,\alpha_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24/17).$$

Die zweite Bestimmungsgleichung für k und α_1 ergibt sich aus (23) unter Berücksichtigung von (24). Sie lautet

$$\frac{d}{a} = \frac{2rK}{rK' + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad (25) \quad \text{mit} \quad r = 2(1 + k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1) - 3 \cdot \frac{E}{K} \quad . \quad . \quad (25a).$$

Mit Hilfe von (21) und (24) gelangt man dann auch zu dem Wert von A. Es wird nämlich

$$A = d \cdot \frac{(1 + k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1)^3}{2rK} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

In Rücksicht auf diese Bestimmungsgleichungen für k, α_1 und A vereinfacht sich der Ausdruck für z zu

$$z = \frac{id}{2rK} \cdot \left[r(u+K) - 3 \cdot Z(u) + \mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{dn}\,u \cdot \frac{1 - 2k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1 + 3k\,\mathrm{sn}\,u}{(1 + k\,\mathrm{sn}\,u)(\mathrm{sn}\,\alpha_1 - \mathrm{sn}\,u)}\right] \quad (20\,a).$$

7. Prüfung der Gl. (20a) für die Abbildungsfunktion. Wie es sein muß, liegt die einzige Nullstelle für z in dem in Frage kommenden Bereich bei $u = K$. Für $u \to +\alpha_1$ geht $z \to \infty$, wie es zu fordern ist. Genauer: nähert sich u von $-K$ her dem Wert α_1, so wird

$$\lim_{u \to \alpha_1 - 0} z = \text{konst.} \cdot i \cdot \mathrm{sgn}\,r : [\,|\mathrm{sn}\,\alpha_1 - \mathrm{sn}\,u|\,]$$

Kommt aber u von $+K$ her, so wird in der Nähe von α_1

$$\lim_{u \to \alpha_1 + 0} z = -\text{konst.} \cdot i \cdot \mathrm{sgn}\,r : [\,|\mathrm{sn}\,\alpha_1 - \mathrm{sn}\,u|\,]$$

Der zweite Pol von z liegt nach (20a) in Uebereinstimmung mit der zu stellenden Forderung bei $u = -K + iK'$. Nähert sich u diesem Punkt in der Weise, daß in $u = u_1 - K + iK'$ mit $\lim u_1 = 0$ u_1 stets positiv reell ist, so wird

$$\lim_{u_1 \to 0} z = -\text{konst.} \cdot i \cdot \mathrm{sgn}\,r \cdot \frac{1}{u_1}$$

Geht aber u gegen $-K + iK'$ wie $u = iu_1 - K + iK'$ mit reellem, ständig abnehmendem u_1, so gilt

$$\lim_{iu_1 \to 0} z = \text{konst.} \cdot \mathrm{sgn}\,r \cdot \frac{1}{u_1}.$$

Aus beiden Betrachtungen geht hervor, daß sich der Punkt z tatsächlich den beiden unendlich fernen Punkten 1 und 3 der z-Ebene in der vorgeschriebenen Richtung nähert, sobald sgn r negativ ist. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, ist im vorliegenden Falle diese Bedingung wirklich erfüllt. Eine weitere Kontrolle der richtigen Lage der Eckpunkte erübrigt sich, da sowieso die späteren Rechnungen dazu noch Gelegenheit geben.

---

[1]) S. Schlömilch, a. a. O., Bd. 2, S. 466, Gl. 163.

8. Die explizite Darstellung von k und α_1. Die Gl. (24) läßt sich ohne weiteres in der Form schreiben

$$k'^2 \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1 + 2k \cdot \mathrm{cn}^2\,\alpha_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\mathrm{a}).$$

Der zweiten Bestimmungsgleichung (25) kann die Gestalt gegeben werden:

$$\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{rK^2} + \frac{K'}{K} = \frac{2a}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,\mathrm{b}).$$

Um über die ungefähre Lage der gemeinsamen Wurzeln dieser beiden Gleichungen ein Urteil zu gewinnen, mögen die beiden letzten Gleichungen graphisch dargestellt werden. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, (24a) nach $k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1$ aufzulösen. Das ergibt nach einigen Zwischenrechnungen

$$k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1 = {}^1/_4 \cdot [1 - k^2 - \sqrt{1 + 14k^2 + k^4}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\mathrm{b}).$$

Diese Funktion $k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1$ ist in Abb. 5 in Abhängigkeit vom Modularwinkel μ aufgetragen, der mit k zusammenhängt durch $k = \sin\mu$. Setzt man die den einzelnen μ-Werten entsprechenden Werte für $k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1$ in $r = 2 \cdot (1 + k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1) - 3\,E/K$ ein, so läßt sich auch r allein als Funktion des Modularwinkels wiedergeben. Abb. 5 enthält den auf diese Weise gefundenen Verlauf von r. Man ersieht aus dieser Kurve, daß r tatsächlich für alle nach (24a) in Frage kommenden Werte von $k \cdot \mathrm{sn}\,\alpha_1$ negativ ist. Da damit r in Abhängigkeit von μ bekannt ist, so läßt sich

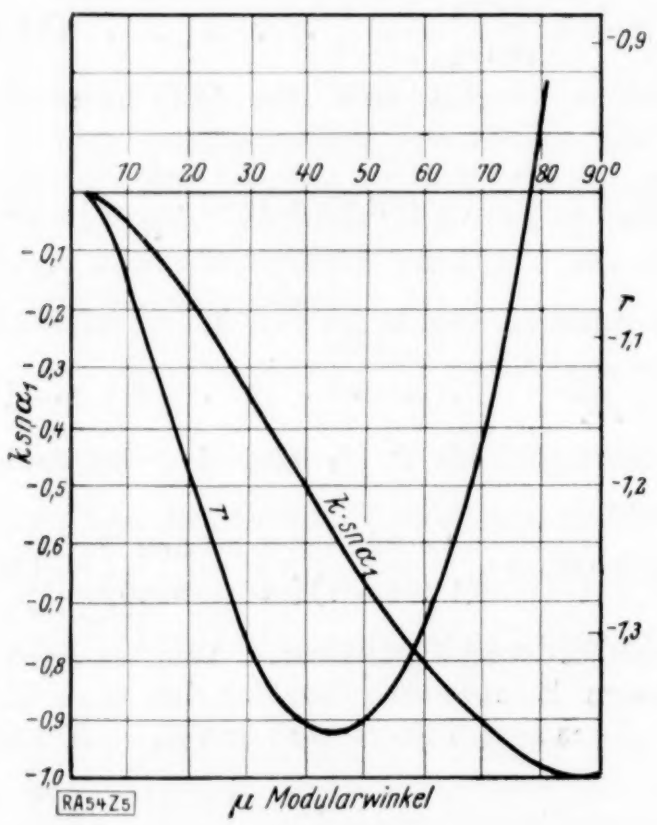


Abb. 5.

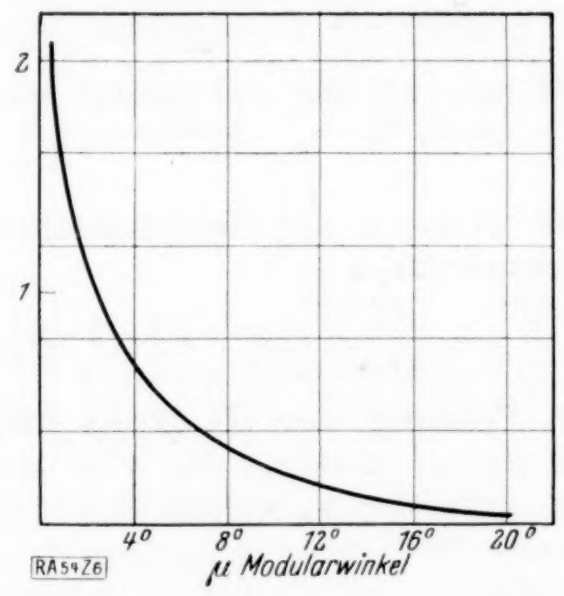


Abb. 6.

ohne Schwierigkeiten auch die linke Seite von (25b) graphisch aufzeichnen. In Abb. 6 ist dies geschehen. Aus dem Verlauf der Kurve aus dieser Abbildung geht zunächst hervor, daß die beiden Gl. (24a) und (25b) innerhalb des in Frage kommenden Wertbereichs von k nur eine einzige Wurzel in bezug auf k haben. Ihre Größe hängt allein von dem Verhältnis $2a:d$ auf der rechten Seite von (25b) ab. Je kleiner d ist, um so kleiner muß nach Abb. 6 auch $k = \sin\mu$ werden. Selbst für den sehr großen Luftspalt $d = a$ wird mit großer Annäherung μ höchstens gleich 0,5°. Für diesen Wert von μ, den größten, der danach bei den vorkommenden praktischen Verhältnissen zu erwarten ist, berechnen sich für k und $q = \exp(-\pi K'/K)$ die folgenden Zahlenwerte:

$$k = \sin\mu = 0{,}00873 \qquad k^2 = 76{,}2 \cdot 10^{-6},$$
$$\log q = 0{,}6776 - 6 \qquad q = 4{,}76 \cdot 10^{-6}.$$

Selbst der Wert $14k^2$, der unter der Wurzel von (24b) vorkommt, wird danach höchstens gleich 0,0011. Für die Berechnung von k bzw. q aus (24a) und (24b) ist es daher ohne weiteres zulässig, die Wurzel in (24b) in eine binomische Reihe zu entwickeln. Man findet dann, wenn vorläufig das Glied k^4 noch beibehalten wird, die Beziehung:

$$k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1 = -2k^2 + 6k^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\mathrm{a}).$$

Berücksichtigt man, daß $k^2 = \vartheta_2^4 : \vartheta_3^4$ ist, so wird $k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1$ in Abhängigkeit des Moduls q der Thetafunktionen:

$$k\,\mathrm{sn}\,\alpha_1 = -32 \cdot q + 1792 \cdot q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\mathrm{b}).$$

(25 b) geht aber nach Einführung der Thetafunktionen über in

$$\ln \frac{1}{q} + \frac{6}{r \cdot \vartheta_3^4} = \frac{2 a \pi}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25\,\mathrm{b}),$$

r nach Gl. (25 a) läßt sich in Rücksicht auf eine bekannte Beziehung[1]) für $E:K$ in der Form schreiben

$$r \cdot \vartheta_3^4 = \vartheta_3^4 \cdot (2 k \operatorname{sn} \alpha_1 - 1) + \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}.$$

Wegen $\vartheta_0'' : \vartheta_0 \approx 8 \pi^2 q : (1 - 2 q)$ und (26 b) geht dann bei Vernachlässigung von q^2 die Bestimmungsgleichung für q über in

$$\ln \frac{1}{q} + 288 \cdot q = 6 + \frac{2 a \pi}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Die erste Näherungswurzel dieser Gleichung lautet:

$$q_e = e^{-\left(6 + \frac{2 a \pi}{d}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Verbessert man diese Wurzel z. B. nach dem Verfahren von Newton, so ergibt sich aus (27) für die Wurzel q der Ausdruck:

$$q = q_e \cdot (1 + 288 \cdot q_e) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28\,\mathrm{a}).$$

Liegt q_e bei $5 \cdot 10^{-6}$, so macht das Korrekturglied nur rund 1,5 ‰ aus.

Mit Hilfe der Beziehung $k = \vartheta_2^2 : \vartheta_3^2$ und der Gl. (26 a) lassen sich dann auch die übrigen, noch interessierenden Größen k, α_1 usw. angeben. Die folgende Zusammenstellung bringt die Bestimmungsgleichungen für diese Größen mit einer den Zweck der späteren Anwendungen übersteigenden Genauigkeit:

$$\left.\begin{array}{ll} k = 4 \sqrt{q_e} \cdot (1 + 140\, q_e) & \alpha_1 = -\,8 \sqrt{q_e} \cdot \left(1 + \frac{308}{3} \cdot q_e\right) \\ \operatorname{sn} \alpha_1 = -\,8 \sqrt{q_e}\,(1 + 92\, q_e) & k \operatorname{sn} \alpha_1 = -\,32\, q_e\,(1 + 232\, q_e) \\ r = -\,(1 + 40\, q_e) & r\,K = -\,\frac{\pi}{2} \cdot (1 + 44\, q_e) \end{array}\right\} \quad (29).$$

9. Bestimmung des t- und u-Wertes für den Punkt γ_1 der z-Ebene. Für die im Abschnitt **2** angedeutete Berechnung der magnetischen Flüsse zwischen den Seitenflächen $\gamma_1 5$, $4 \gamma_2$ und dem Kern B muß noch bekannt sein, welche t- und u-Werte den beiden Punkten γ_1 und γ_2 im Abstande h von den Ecken 4 und 5 entsprechen. Zunächst werde der Punkt γ_1 behandelt.

Da γ_1 zwischen den Punkten 5 und 1 auf dem Rande des z-Bereiches liegt, so wird der zugehörige Wert von u zwischen $+K + i K'$ und $-K + i K'$ zu suchen sein. Der dem Punkt $u = i K'$ entsprechende Punkt der z-Ebene hat natürlich seine Lage gleichfalls auf der Kante 51 der z-Ebene. Er liegt jedoch nur wenig oberhalb des Punktes 5; denn setzt man den Wert $u = i K'$ in (20 a) ein, so erhält man für

$$z = i y - a \quad \text{mit} \quad y = \frac{d}{2} \cdot \left[1 + \frac{4}{\pi} \cdot (1 - 28\, q_e)\right].$$

Wie es sein muß, ist zwar $y > d$, aber es ist nur unwesentlich größer, nämlich etwa gleich 1,185 d für $k = 0{,}0087$. Diese Feststellung legt es nahe, den Wert $z = i \cdot (h + d) - a$ durch ein u der Form $u = -K + i K' + u_{\gamma_1}$ darzustellen unter der Voraussetzung, daß u_{γ_1} nur eine kleine Zahl $\leqq 0{,}2$ ist. Läßt man diese Annahme unter Vorbehalt der nachträglichen Prüfung gelten, so läßt sich in (20 a) schreiben

$$u + K = i K' + u_{\gamma_1}, \qquad Z(u) = -\,\frac{\pi\, i}{2 K} - u_{\gamma_1}$$

und für das letzte Glied

$$-\,\frac{4}{u_{\gamma_1}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot u_{\gamma_1}^2\right).$$

Zu dieser Umformung wurden die bekannten Transformationsgleichungen[2]) der elliptischen Funktion mit dem Argument $-K + i K' + u$ und die für diese Funktionen

[1]) S. Krause, a. a. O., S. 108.
[2]) Siehe M Krause, a. a. O., S. 53.

geltenden Reihenentwicklungen[1]) benutzt. Dadurch erhält man nach Subtraktion von $i\,d - a$ von der Gleichung für $i\,(h+d) - a$ für u_{γ_1} die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{4}{u_{\gamma 1}} + \frac{2}{3} \cdot u_{\gamma_1} = \frac{\pi\,(h+d)}{d}\,.$$

Die bereits verbesserte Wurzel dieser Gleichung lautet:

$$u_{\gamma_1} = \frac{4\,d}{\pi\,(h+d)} \cdot \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{d^2}{\pi\,(h+d)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Daraus folgt weiter

$$t_{\gamma_1} = \tau_1 = \mathrm{sn}\,(-K + i\,K' + u_{\gamma_1}) = -\left(1 + \frac{8\,d^2}{\pi^2\,(h+d)^2}\right) : 4\,\sqrt{q_e} \quad . \qquad (30\,\mathbf{a}).$$

Aus (30) ist ersichtlich, daß h etwa gleich $5\,d$ sein muß, damit die Voraussetzung über die Größenordnung erfüllt ist. Das ist bei den üblichen Abmessungen der Fall.

10. Bestimmung des t- und u-Wertes für den Punkt γ_2 der z-Ebene. Um andererseits den u Wert zu finden, der dem Punkt γ_2 mit $z = i\,(h+d)$ entspricht, werde u dargestellt in der Form $u = \alpha_1 + u_{\gamma_2}$, wobei wiederum die Voraussetzung gemacht werden soll, daß u_{γ_2} nur eine kleine Zahl ist. Werden in der gleichen Weise wie vorher für die elliptischen Funktionen die bekannten Reihenentwicklungen eingesetzt, so gelangt man mit einigen Zwischenrechnungen für u_{γ_2} zu der Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1 + {}^1\!/_3\,\alpha_1}{u_{\gamma\,2}} + \frac{2}{3} \cdot u_{\gamma_2} = \frac{\pi\,h}{d} \cdot \left(1 + \frac{d}{2\,h}\right).$$

Aus ihr folgt für die verbesserte Wurzel von u_{γ_2}

$$u_{\gamma_2} = \frac{d}{\pi\,h} \cdot \left(1 - \frac{d}{\pi\,h} + \frac{5}{3} \cdot \frac{d^2}{(\pi\,h)^2} + \frac{1}{3}\,\alpha_1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

und damit

$$t_{\gamma_2} = \tau_2 = \mathrm{sn}\,(\alpha_1 + u_{\gamma_2}) = \alpha_1 + \frac{d}{\pi\,h} \cdot \left(1 - \frac{d}{\pi\,h} + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{d}{\pi\,h}\right]^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (31\,\mathbf{a}).$$

Die einzelnen Rechnungen an der Abbildungsfunktion z können damit abgeschlossen werden.

E) Die Bestimmung der Abbildungsfunktion des χ-Streifens.

1. Die Herstellung der Abbildungsfunktion. Bei der zweiten, bei weitem einfacheren Abbildungsaufgabe kommt es darauf an, nach Abb. 7 den zur Ψ-Achse parallelen Streifen zwischen $\Phi = 0$ und $\Phi = V$ in der Ebene der $\chi = \Phi + i\,\Psi$ auf die gleiche obere t-Halbebene konform abzubilden, um die es sich schon bei der ersten Abbildungsaufgabe handelte. Man hat es dabei in der Hand, festzulegen, welche beiden Punkte der reellen t-Achse den beiden unendlich fernen Punkten des Streifens entsprechen sollen. Aus später ersichtlichen Gründen werde im vorliegenden Falle die Festsetzung getroffen, daß bei der Abbildung der Punkt τ_1 in den oberen, der Punkt τ_2 in den unteren unendlich fernen Punkt des Streifens übergeht. Da auch jetzt wieder bei der Abbildung der Umlaufsinn erhalten bleibt, so werden die zwischen τ_1 und τ_2 liegenden Punkte 1, 2, 3 der reellen t-Achse auf der Ψ-Achse selbst liegen müssen, die Punkte 4 und 5 dagegen auf der zur Ψ-Achse parallelen Graden $\Phi = V$. Die Differentialgleichung für die Abbildungsfunktion läßt sich sofort nach Schwarz-Christoffel angeben. Sie lautet

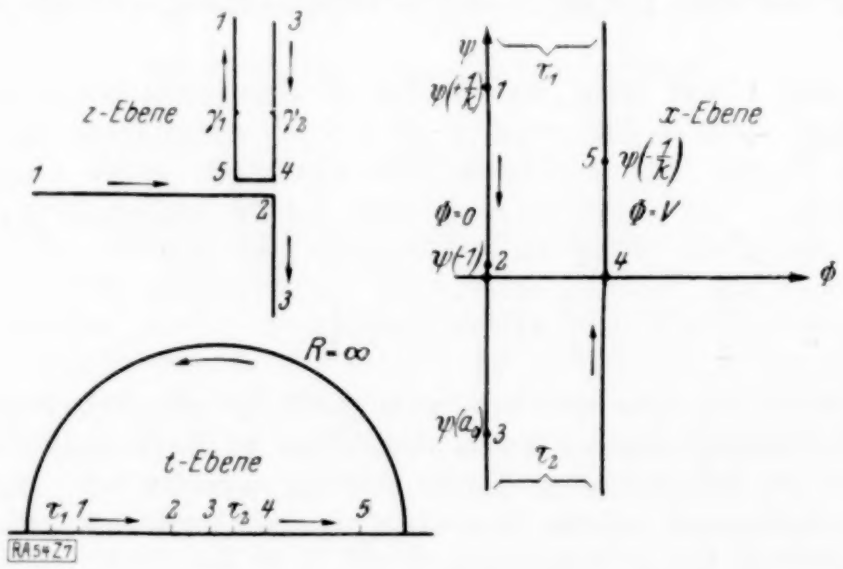


Abb. 7.

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{C}{(t-\tau_1)\,(t-\tau_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

[1]) Siehe M. Krause, ebenda, S. 62.

Um C zu bestimmen, werde in der oberen t-Halbebene längs eines sehr kleinen Halbkreises ein halber Umlauf um den Punkt $t = \tau_1$ ausgeführt. Für die Punkte dieses Halbkreises gilt $t = \tau_1 + \varrho \cdot e^{i\varphi}$. Wird dieser Wert für t in (32) eingesetzt und integriert, so gelangt man nach Einsetzung der Grenzen zu der folgenden Bestimmungsgleichung für C:

$$C = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\pi i} \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32a).$$

Mit diesem Ausdruck für C wird nach Integration bei der willkürlichen Wahl von $+1$ als der unteren Grenze

$$\chi = -\frac{iV}{\pi} \cdot (\tau_1 - \tau_2) \cdot \int_{+1}^{t} \frac{dt}{(t-\tau_1)(t-\tau_2)} + B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Der Wert des Integrals ist leicht zu bestimmen. Wird noch die Festsetzung getroffen, daß dem Punkt 4 mit $t = +1$ der Punkt $\chi = V$ in der χ-Ebene entspricht, so wird endgültig

$$\chi = V + \frac{iV}{\pi} \cdot \ln \frac{(t-\tau_2)(1-\tau_1)}{(t-\tau_1)(1-\tau_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Für den nach Abb. 7 in Betracht gezogenen Streifen der χ-Ebene muß in (34) für den Logarithmus der Hauptwert genommen werden. Der Ausdruck (34) ist gültig für alle Werte von t in der oberen Halbebene mit Ausnahme der Punkte $t = \tau_1$ und $t = \tau_2$, sobald man nur darauf achtet, daß sich χ längs eines jeden beliebigen Weges in diesem Bereich der t-Ebene stetig ändert. Er ist aber nicht unmittelbar gerade in der angeschriebenen Form der Gl. (34) für alle Werte brauchbar. Speziell für reelle Werte von t läßt sich (34) ohne weitere Umformung nur benutzen, wenn $t > \tau_2$ oder $t < \tau_1$ ist. In diesen beiden Fällen kann (34) geschrieben werden in der Form:

$$\Phi = V \quad \Psi(t) = \frac{V}{\pi} \cdot \ln \frac{(t-\tau_2)(1-\tau_1)}{(t-\tau_1)(1-\tau_2)} \quad (t \text{ reell u. } t < \tau_1 \text{ od. } t > \tau_2) \; . \quad . \quad (34a).$$

Um zu einem ähnlichen Ausdruck zu gelangen für solche t, für die $\tau_1 < t < \tau_2$ ist, kann man von (34) ausgehen und untersuchen, wie sich diese Gleichung ändert, wenn man einen halben Umlauf längs eines sehr kleinen Halbkreises in der oberen t-Halbebene um den Punkt $t = \tau_2$ ausführt. Für reelle Werte von t gewinnt man dann die Darstellung

$$\Phi = 0 \quad \Psi(t) = \frac{V}{\pi} \cdot \ln \frac{(\tau_2 - t)(1-\tau_1)}{(t-\tau_1)(1-\tau_2)} \quad (t \text{ reell}, \tau_1 < t < \tau_2) \; . \quad . \quad . \quad (34b).$$

Die beiden Formeln (34a) und (34b) der Gl. (34) entsprechen der oben geäußerten Behauptung, daß die Punkte 1, 2, 3 auf der Geraden $\Phi = 0$, die Punkte 4, 5 auf der Geraden $\Phi = V$ der χ-Ebene liegen.

2. Berechnung von $\Psi(t)$ für einige bestimmte t-Werte. Für die Zwecke der späteren Anwendung müssen aus (34a) und (34b) die Werte von $\Psi(t)$ für alle t berechnet werden, die den Punkten 1, 2, 3, 4 und 5 der reellen t-Achse entsprechen. Da es sich dabei um rein formale Rechnungen handelt, bei denen in Rücksicht auf die Größenordnung einzelner Faktoren von bekannten Reihenentwicklungen Gebrauch gemacht werden kann, so mag es genügen, wenn die entsprechenden Ausdrücke für $\Psi(t)$ im folgenden sofort angegeben werden. Für den Punkt 1 der reellen t-Achse ist $t = -1/k$ und aus (34b) folgt

$$\Phi = 0, \quad \Psi\left(-\frac{1}{k}\right) = \frac{V}{\pi} \cdot \left[2 \cdot \ln \frac{\pi(h+d)}{4d} + 3 + \frac{a\pi}{d} - \ln 2 + \frac{d}{\pi h} + \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{d}{\pi h}\right)^2 - 4\sqrt{q_e}\right] \quad (35a).$$

Für den Punkt 2 ist $t = -1$ und daher nach (34b)

$$\Phi = 0, \quad \Psi(-1) = \frac{V}{\pi} \cdot \left[2 \cdot \frac{d}{\pi h} \cdot \left(1 - \frac{d}{\pi h}\right) - 8\sqrt{q_e}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35b).$$

Für den Punkt 3 ist $t = a_3$ und deshalb ebenfalls nach (34b)

$$\Phi = 0, \quad \Psi(a_3) = \frac{V}{\pi} \cdot \left[\ln \frac{d}{\pi h} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{\pi h}\right)^2 - 4 \cdot \sqrt{q_e}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35c).$$

Für Punkt 4 mit $t = +1$ ist nach Festsetzung

$$\Phi = V, \quad \Psi(+1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35d)$$

und für den Punkt 5 mit $t = +1/k$ nach (34a)

$$\Phi = V, \quad \Psi\left(+\frac{1}{k}\right) = \frac{V}{\pi} \cdot \left[3 + \frac{a\pi}{d} - \ln 4 + \frac{d}{\pi h} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{\pi h}\right)^2 - 4\sqrt{q_e}\right] \quad (35e).$$

Zu den Reihenentwicklungen, die bei der Herleitung der Gl. (35) auftreten, verdient noch allgemein bemerkt zu werden, daß in sämtlichen Reihen nur die Glieder bis zur Größenordnung $(d:\pi h)^2$ einschließlich berücksichtigt wurden. Dann braucht auch nur das Glied $4 \cdot \sqrt{q}$ beibehalten zu werden, das für größere d und für h herunter bis zu 4 cm ebenfalls in der Größenordnung von $(d:\pi h)^2$ liegt. Die Genauigkeit in der Berechnung der Gl. (35) ist damit absichtlich etwas weiter getrieben worden, als für die späteren Zwecke nötig ist.

F) Die Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit.

Im parallelebenen, magnetostatischen Feld kann bei einer Luftstrecke, die zwischen zwei Kurvenstücken liegt, nur dann von einer bestimmten, ihr eigentümlichen magnetischen Leitfähigkeit gesprochen werden, wenn die beiden Kurvenstücke zu zwei Niveaulinien verschiedenen Potentials gehören und die seitlichen Begrenzungen der Luftstrecke zwischen den Kurvenstücken von Strömungslinien oder Induktionslinien gebildet werden. Die magnetische Leitfähigkeit ist dann identisch mit dem magnetischen Fluß zwischen den beiden Kurvenstüken, bezogen auf die Einheit der magnetischen Potentialdifferenz. Ist $\Phi(x\,y)$ die magnetische Potentialfunktion und $\Psi(x\,y)$ die Strömungsfunktion, so muß also auf den beiden Kurvenstücken das eine Mal $\Phi = 0$, das andere Mal $\Phi = V$ sein, während für die seitlichen Begrenzungen der Luftstrecke $\Psi = C_1$ und $\Psi = C_2$ gelten muß. Der magnetische Fluß, der unter diesen Umständen senkrecht zum Kurvenstück $\Phi = V$ zwischen $\Psi = C_1$ und $\Psi = C_2$ und über die Tiefe b des Feldes in den derart abgegrenzten Luftraum eintritt, ist dann, abgesehen von seiner Richtung, gegeben durch

$$Q = \mu_0 \cdot b \cdot \int_{C_1}^{C_2} \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right| \cdot d\,s \quad Vs, \qquad \left(\mu_0 = 0{,}4\,\pi \cdot 10^{-8}\,\frac{H}{\mathrm{cm}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

worin d/dn die Ableitung in Richtung der Kurven normale von $\Phi = V$ und ds das Bogendifferential längs der Kurve $\Phi = V$ bedeutet. Daraus folgt sofort die magnetische Leitfähigkeit der Luftstrecke zu $g = Q : V$.

Ein besonders einfacher Fall eines magnetostatischen Feldes liegt vor in dem Feld zwischen zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Platten, deren einander zugekehrte Oberflächen mit entgegengesetzt gleichen magnetischen Mengen behaftet sind. Für das Folgende ist es dabei gleichgültig, ob ein solches Feld praktisch verwirklicht werden kann oder nicht. Das Bild dieses Feldes läßt sich am Streifen der ζ-Ebene, Bild 7, näher beschreiben. Die Kraftlinien oder Strömungslinien sind die Geraden $\Psi =$ konst., die beiden äußersten Niveauflächen bilden die Geraden $\Phi = 0$ und $\Phi = V$. Die magnetische Leitfähigkeit einer Luftstrecke von der Tiefe b genommen zwischen zwei Kraftlinien $\Psi(t_2) = C_2$ und $\Psi(t_1) = C_1$, ist in diesem einfachen Fall nach (36) gegeben durch

$$g = \frac{\mu_0 \cdot b}{V}\,[\Psi(t_2) - \Psi(t_1)] \quad H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37),$$

denn es ist nur eine Sache der Bezeichnung, daß unter den angenommenen Verhältnissen dn unmittelbar selbst gleich $d\Phi$ und $ds = d\Psi$ ist. Die Gl. (37) läßt sich in sehr bequemer Weise dazu benutzen, um die magnetische Leitfähigkeit beliebiger Abschnitte des Luftzwischenraums zwischen den Eisenkörpern A und B nach Abb. 4 zu berechnen. Soll z. B. die magnetische Leitfähigkeit bestimmt werden, die dem von der Polfläche 45 zur Kante 12 des Eisenkörpers B übertretenden Kraftlinienbündel entspricht, so ist in (37) für $\Psi(t_2)$ nach Abb. 7 derjenige Ψ-Wert einzusetzen, der dem Punkt 5 mit $t = +1/k$ zugeordnet ist. Für $\Psi(t_1)$ muß dagegen derjenige Ψ-Wert gewählt werden, der dem Punkt 2 mit $t = -1$ entspricht, denn nach (35 b, d) ist $\Psi(-1) > \Psi(+1)$. Würde man für $\Psi(t_1)$ den Wert $\Psi(+1)$ benutzen entsprechend dem Wert von Ψ für den Punkt 4, so erhielte man nach (37) die magnetische Leitfähigkeit für den gesamten, aus der Polfläche austretenden Fluß. Dieser Fluß ist aber nicht identisch mit dem Kraftlinienbündel, das sich von der Polfläche zur Kante 12 hinüberzieht, sondern größer um den Teilfluß, der sich von der Pol-

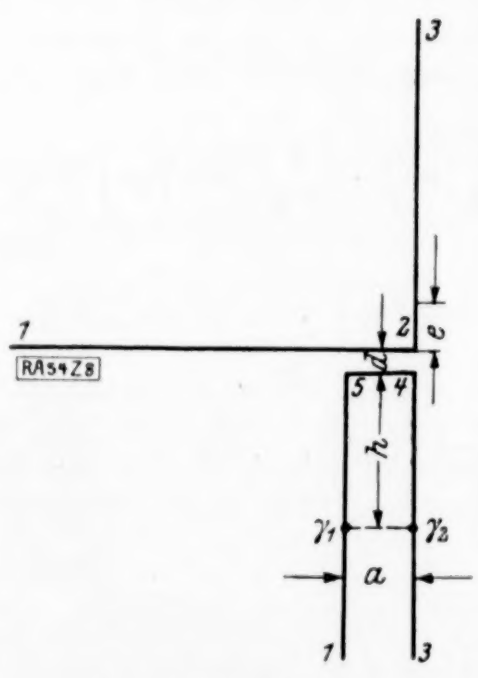


Abb. 8.

fläche noch zur Kante 23 des Eisenkörpers B hinaufzieht. — Auf diese Weise erhält man die folgende Formelzusammenstellung, zu derem besseren Verständnis die Abb. 8 dient:

a) Leitfähigkeit für den Fluß zwischen der Mantelfläche γ_1 5 des Kerns A und der Fläche 12 des Kerns B:

$$g_{\gamma_1 5,12} = \mu_0 \cdot b/V \cdot [\Psi(-1/k) - \Psi(+1/k)] = 8\,b \cdot \ln \frac{\pi\,(h+d)}{2\sqrt{2 \cdot d}} \cdot 10^{-9} \quad H \quad . \quad . \quad . \quad (38a),$$

b) Leitfähigkeit für den Fluß zwischen der Polfläche 45 des Kerns A und der Fläche 12 des Kerns B:

$$g_{45,12} = \mu_0\, b/V \cdot [\Psi(+1/k) - \Psi(-1)] = 4\,b \cdot \left[3 + \frac{a\,\pi}{d} - \ln 4 - \frac{d}{\pi\,h}\right] \cdot 10^{-9} \quad H \quad . \quad . \quad (38b),$$

c) Leitfähigkeit für den Fluß zwischen der Polfläche 45 des Kerns A und der Fläche 23 des Kerns B:

$$g_{45,23} = \mu_0\, b/V \cdot [\Psi(-1) - \Psi(+1)] = 8\,b \cdot \frac{d}{\pi\,h} \cdot 10^{-9} \quad H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38c),$$

d) Leitfähigkeit für den Fluß zwischen der Mantelfläche $4\,\gamma_2$ des Kerns A und der Fläche 23 des Kerns B:

$$g_{4\gamma_2,23} = \mu_0 \cdot b/V \cdot [\Psi(+1) - \Psi(a_3)] = 4\,b \cdot \ln \frac{\pi\,h}{d} \cdot 10^{-9} \quad H \quad . \quad . \quad . \quad (38d).$$

Für die gesamte magnetische Leitfähigkeit berechnet sich der Ausdruck:

$$g_{\gamma_1 \gamma_2, 13} = 4\,b \cdot \left[3 + \frac{a\,\pi}{d} + 2 \cdot \ln \frac{\pi\,(h+d)}{2\sqrt{2 \cdot d}} + \ln \frac{\pi\,h}{d} + \frac{d}{\pi\,h}\right] \cdot 10^{-9} \quad H \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

In den Gl. (38) sind nur die Glieder bis zur Größenordnung $\frac{d}{\pi\,h}$ berücksichtigt. Eine größere Genauigkeit erscheint überflüssig, da schon in der graphischen Darstellung

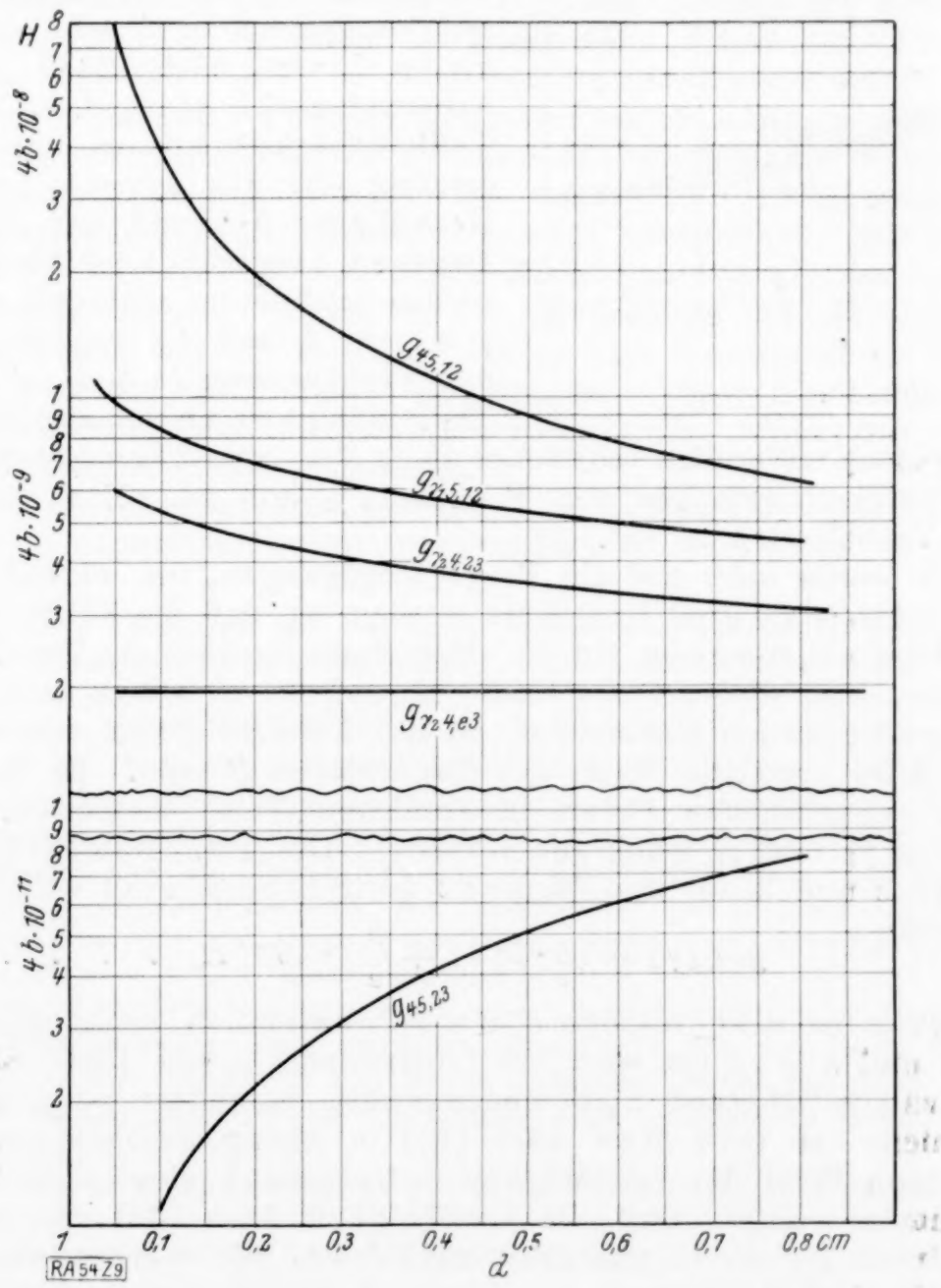


Abb. 9.

der Einfluß der Glieder höherer Ordnung verschwindet. Außerdem wäre es mit Hilfe der Gl. (35) leicht möglich, durch Aufnahme der Glieder in der Größenordnung $(d:\pi h)^2$ die Genauigkeit der Formeln zu verbessern. Entsprechend den früheren Voraussetzungen sind die Gl. (38) gültig, solange $d \lessapprox a$ ist.

In Abb. 9 sind die diesen Gleichungen entsprechenden Teilleitfähigkeiten für den speziellen Fall $h = 6$ cm und $a = 1{,}2$ cm in Abhängigkeit von d aufgetragen. Um trotz der sehr verschiedenen Größenordnungen der einzelnen g-Werte eine gleichbleibende Genauigkeit in der Darstellung zu erzielen, wurde eine logarithmische Ordinatenskala gewählt. Man ersieht aus der Abbildung, daß für kleine d die Leitfähigkeit in dem schmalen Luftraum zwischen der Polfläche und dem gegenüberliegenden Eisenkern bei weitem überwiegt, wie es auch zu erwarten steht. Dagegen wird für größere d der Unterschied zwischen den einzelnen Teilleitfähigkeiten schnell kleiner. In Abb. 10 ist die magnetische Leitfähigkeit der ganzen Luftstrecke dargestellt, wie sie sich durch Addition der vier Gl. (38) ergibt, und zwar wiederum in Abhängigkeit vom Luftspalt d für drei verschiedene Werte von h. Es soll hierdurch gezeigt werden, daß die Größe von h in dem angenommenen Größenbereich, der etwa der Wickelhöhe der Erregerspule entspricht, den Wert der Gesamtleitfähigkeit nur wenig beeinflußt.

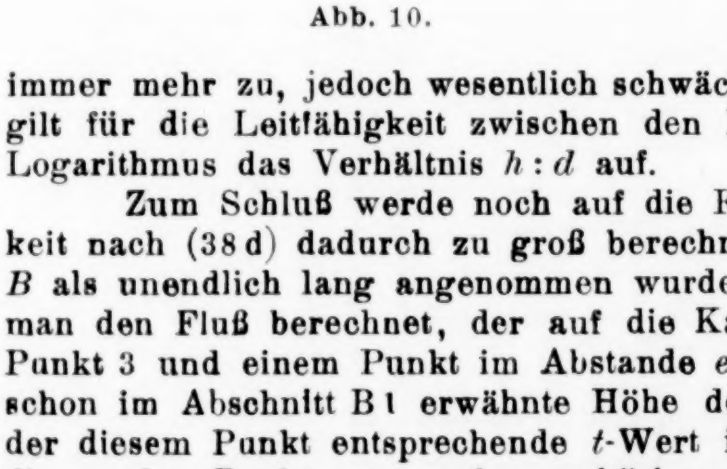


Abb. 10.

Der Aufbau der Gl. (38) läßt charakteristische Unterschiede erkennen in den Ausdrücken für die Leitfähigkeit von Luftstrecken zwischen Parallelflächen und zwischen solchen Flächen, die aufeinander senkrecht stehen. Die Leitfähigkeit zwischen den Parallelflächen 45 und 12 hängt nach (38b) u. a. ab von dem Verhältnis a/d. Diese Leitfähigkeit wächst also mit abnehmendem d sehr schnell. Für sehr kleine d wird nach (38b) g mit großer Annäherung gleich $ab:d$, d. h. für die betreffende Teilleitfähigkeit kommt unter dieser Voraussetzung nur das schmale Luftprisma mit der Grundfläche $a \cdot b$ und der Höhe d in Frage. Dagegen hängt die Leitfähigkeit zwischen den beiden zueinander senkrecht stehenden Flächen γ_1 5 von A und 12 von B vom Logarithmus des Verhältnisses $(h + d):d$ ab. Auch diese Teilleitfähigkeit nimmt also für abnehmende d immer mehr zu, jedoch wesentlich schwächer als in dem zuerst betrachteten Fall. Dasselbe gilt für die Leitfähigkeit zwischen den Flächen 4 γ_2 und 23. Nur tritt hier unter dem Logarithmus das Verhältnis $h:d$ auf.

Zum Schluß werde noch auf die Frage eingegangen, um wieviel die Teilleitfähigkeit nach (38d) dadurch zu groß berechnet worden ist, daß die Kante 23 des Eisenkerns B als unendlich lang angenommen wurde. Man kann darüber ein Urteil gewinnen, wenn man den Fluß berechnet, der auf die Kante 23 auftrifft zwischen dem unendlich fernen Punkt 3 und einem Punkt im Abstande e von der Ecke 2. Dabei soll e nach Abb. 1 die schon im Abschnitt B 1 erwähnte Höhe des Kernstückes B sein. Es läßt sich auch hier der diesem Punkt entsprechende t-Wert in ähnlicher Weise berechnen, wie weiter oben die zu den Punkten γ_1 und γ_2 gehörigen t-Werte. Die Teilleitfähigkeit, die diesem zwischen den Punkten e und 3 auf die Fläche 23 auftreffenden Fluß entspricht, ergibt sich danach in der Größe

$$g_{e\,3,4\,\gamma 2} = 4b \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \cdot 10^{-9} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Diese Teilleitfähigkeit ist also, solange $d \lessapprox a$ ist, wesentlich unabhängig vom Luftspalt d. Für $h = 6$ cm und $e = 1{,}2$ cm wird der Logarithmus gleich 1,80. Sie verringert also den Wert der Gesamtleitfähigkeit nicht nennenswert, besonders wenn man bedenkt, daß in Wirklichkeit nicht der volle Wert nach (40) in Abzug gebracht werden darf, wenn man auf den wahren Wert der Leitfähigkeit entsprechend einer Gestalt des Körpers B nach Abb. 1 kommen wollte. Daß die Leitfähigkeit nach (40) von d unabhängig ist, während der Ausdruck für die Leitfähigkeit nach (38d) mit wachsendem d abnimmt, weist darauf hin, daß die Feldstärke längs der Kante 23 mit größer werdendem Luftspalt von der Ecke 2 aus immer langsamer abfällt.

Anwendung der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie auf Nomographie.

Von **EUGEN LUKÁCS** in Wien.

Schon L. Lalanne, einer der Begründer der Nomographie, bedient sich in seinen nomographischen Arbeiten konsequent der Methoden der darstellenden Geometrie. Um ein Nomogramm für einen Funktionalzusammenhang $f(x, y, z) = 0$ in drei Variablen zu erhalten, betrachtet Lalanne x, y, z als rechtwinklige kartesische Koordinaten und untersucht die durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellte Fläche.

Diese stellt er in kotierter Projektion dar und erhält so eine graphische Tafel [1]). Die späteren Autoren verwendeten zumeist nicht die räumliche Deutung als Ausgangspunkt für die nomographische Theorie der Gleichungen dreier Veränderlicher [2]).

Für Gleichungen zwischen mehr als drei Veränderlichen verwendete man meines Wissens keine räumliche Deutung [3]). In der vorliegenden Arbeit wollen wir die mehrdimensionale darstellende Geometrie auf die Nomographie anwenden. Dabei werden wir nur Nomogramme von Gleichungen zwischen vier Veränderlichen in ihrer Beziehung zum vierdimensionalen euklidischen Raum betrachten, da man dann ohne Schwierigkeiten die darstellend geometrische Methode auf die nomographische Theorie der Gleichungen in beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen kann. Bevor wir mit diesen Untersuchungen beginnen, müssen wir erst einige Bemerkungen über die darstellende Geometrie des vierdimensionalen euklidischen Raumes machen.

In seiner Abhandlung: »Ueber die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes« behandelt Th. Schmid eine allgemeine axiale Abbildung des vierdimensionalen Raumes auf die Ebene [4]). Nach Lösung der Koinzidenzaufgabe in dieser allgemeinen Abbildung behandelt er Sonderfälle dieser Abbildung. Insbesondere wird nachgewiesen, daß die von P. H. Schoute [5]) untersuchte Abbildung durch Vereinigung von zwei gleichwertigen — bereits metrisch spezialisierten — Abbildungen erhalten wird [6]). Durch geeignete Annahme des Koordinatensystems und der Bildebenen wird dabei auch eine einfache Beziehung zwischen den Koordinaten des Raumpunktes $P(x, y, z, u)$ und den Koordinaten seiner Projektionen P' und P''' hergestellt. Bei dieser Spezialisierung hat nämlich der Grundriß P' von P die Koordinaten (x, y); der Kreuzriß P''' von P die Koordinaten (z, u), Abb. 1. Dabei wurde die z-Skala auf derselben Geraden aber entgegengesetzt gerichtet wie die x-Skala; die u-Skala auf derselben Geraden aber entgegengesetzt gerichtet wie die y-Skala aufgetragen. Diese Abbildung werden wir bei unseren nomographischen Betrachtungen verwenden, wir wollen daher noch ganz kurz die Abbildung der Raumelemente besprechen [7]).

Die Punkte P des vierdimensionalen euklidischen Raumes werden auf die orientierten Punktepaare (P', P''') abgebildet. Eine Punktreihe g ist durch zwei ähnliche Punktreihen

---

[1]) Léon Lalanne: Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique. Annales des ponts et chaussées (Paris 1846) Chap II § 3 Nr. 17; 18. — Ferner Lalanne: Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques (Paris 1878). — Siehe diesbezüglich auch: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. I/2 F. Mehmke: Numerisches Rechnen Nr. 44, S. 1029 Anm. 427, 431; ferner Th. Schmid: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie Bd. II, S. 339 Anm. 8.

[2]) Von der räumlichen Deutung geht auch Schmid aus. Lehrbuch II § 61 S. 329 ff.

[3]) Wohl betrachtet Mehmke Anwendungen der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie auf die Mechanik, die Chemie und die Lösung numerischer Gleichungssysteme; ihn interessiert aber dabei vor allem die darstellend geometrische Seite des Problems. — R. Mehmke: Ueber die darstellende Geometrie von Räumen von vier und mehr Dimensionen. Stuttgarter mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen, II. Serie, 6. Bd., 2. Heft (September 1904) S. 44 ff.

[4]) Th. Schmid: Ueber die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes. Wiener Akademieberichte: Math.-naturwiss. Klasse, Abt. IIa, 137. Band, 9. und 10. Heft, Wien 1928, S. 621 bis 645. — Ein besonderer Fall dieser Abbildung wurde behandelt von L. Hofmann: Konstruktive Lösung der Maßaufgaben im vierdimensionalen euklidischen Raum. Wiener Akademieberichte 130. Band (1921), S. 169 bis 188.

[5]) P. H. Schoute: Mehrdimensionale Geometrie Bd. I (Sammlung Schubert Bd. 35). Leipzig 1902 § 5 S. 84 ff.

[6]) Siehe Schmid: a. a. O. Nr. 5, S. 630 bis 632.

[7]) Siehe Schmid: a. a. O. Nr. 1, 6, 7.

(g', g''') abgebildet. Ein Punktfeld φ ist durch affine Felder (φ', φ''') abgebildet. Die ∞^3 Punkte P, welche auf einer Ueberebene Π liegen, sind durch Punktepaare (P', P''') abgebildet, welche auf entsprechenden Strahlen von perspektiv ähnlichen Parallelstrahlbüscheln liegen. Diese Parallelstrahlbüschel werden die Ordnerbüschel; ihre Perspektivachse wird die Koinzidenzgerade der Ueberebene Π genannt.

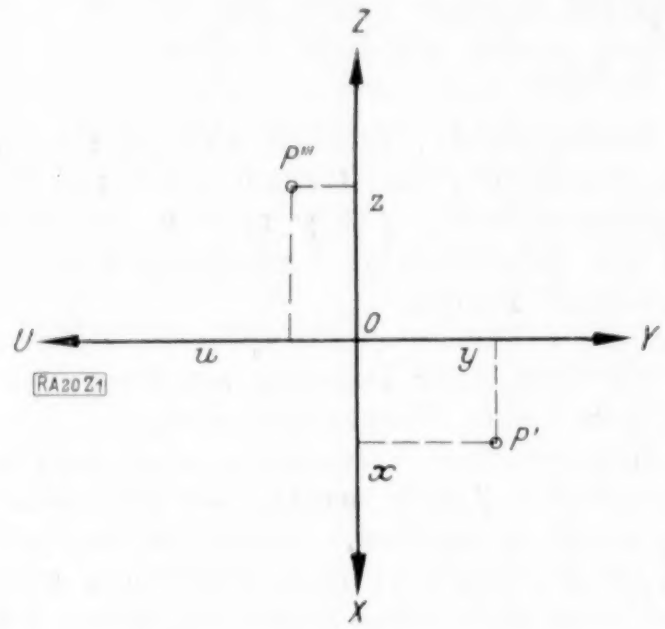


Abb. 1.

Bei unseren nomographischen Betrachtungen werden wir wohl gelegentlich auf die soeben angeführten Sätze Bezug nehmen, werden uns aber im folgenden nicht mehr mit den Theorien der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie befassen. Wir wollen daher die obigen Sätze nicht beweisen, diesbezüglich sei vor allem auf die bereits zitierte Abhandlung von Schmid, ferner auf die Arbeit von Hofmann verwiesen.

1. Die darstellend geometrische Theorie der kartesischen Tafeln. Eine Gleichung in vier (inhomogenen) Variablen $F(x, y, z, u) = 0$ stellt im $\Re_4$ eine Ueberfläche $^4\Psi$ dar. Diese schneiden wir mit erstprojizierenden Ebenen $\left.\begin{matrix} x = \text{constans} \\ y = \text{constans} \end{matrix}\right\}$, die wir »Schichtebenen« nennen. Der Grundriß der Schichtebene $x = x_1$, $y = y_1$ ist der Punkt (x_1, y_1) der Bildebene, der Kreuzriß erfüllt die ganze zu-Ebene. Die Schichtebenen schneiden $^4\Psi$ in den Schichtenlinien s, die Kreuzrisse der Schichtenlinien bilden eine im allgemeinen zweiparametrige Kurvenschar $\mathfrak{s}$. Jedem Grundriß einer Schichtebene (x_i, y_i) ist eine Kurve s_i''', der Kreuzriß der in der Schichtebene liegenden Schichtenlinie s_i, zugeordnet. An der Kurve s_i''' kann man zu jedem Wert z_i die zugehörigen Werte u_i ablesen und hat so die zu (x_i, y_i, z_i) gehörigen u-Werte gefunden.

Wenn man mit Hilfe der Methoden der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie Nomogramme konstruieren will, so muß man folgende Frage beantworten: Wie findet man den Kreuzriß einer Schichtenlinie, deren Grundriß gegeben ist?

2. Die verschiedenen Tafeltypen. Vorerst werden wir jene Spezialfälle untersuchen, die praktisch von Bedeutung sind.

1. Wir stellen an die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ folgende Forderungen:

(I). Es soll eine Kurvenschar $f(x, y; \alpha) = 0$ — wobei α der variable Parameter ist — geben von der Eigenschaft, daß $F(x_i, y_i, z, u) = \text{konst.}$ $F(x_j, y_j, z, u)$ dann und nur dann gilt, wenn beide Wertepaare (x_i, y_i) und (x_j, y_j) eine der Gleichungen $f(x, y; \alpha) = 0$ (bei festem α) erfüllen.

(I A) Die durch die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ dargestellte Ueberfläche $^4\Psi$ soll die Koinzidenzebene[1]) $\varkappa$ entweder selbst schneiden oder es soll mindestens möglich sein, $^4\Psi$ durch Parallelverschiebung in die gewünschte Lage zu bringen.

Ferner soll es für den Rechenbereich von x und y zu jedem Wertpaar (x, y) ein und nur ein α geben (dies ist z. B. erfüllt, wenn $f(x, y; \alpha) = 0$ ganz ist in α) und für alle Parameter α dieses Bereiches soll die Kurve $f(x, y; \alpha) = 0$ die Kurve $F(x, y, -x, -y) = 0$ in mindestens einem reellen Punkt schneiden.

Ist die Bedingung (I) erfüllt, so sehen wir, daß die Kurven $f(x, y; \alpha_i) = 0$ und $f(x, y; \alpha_j) = 0$ nur dann Punkte gemein haben (α_i, α_j fest), wenn $\alpha_i = \alpha_j$ ist; d. h., daß zu jedem Wertpaar (x, y) höchstens ein Wert α gehört.

Die Kurven der Schar $f(x, y; \alpha_i) = 0$ verbinden alle Punkte doppelter Knoten (x, y), die Grundrisse von solchen Schichtenlinien sind, deren Kreuzriß durch dieselbe Kurve der Schar $\mathfrak{s}$ dargestellt wird. Bei festem α_i stellen die beiden Gleichungen $\left.\begin{matrix} F(x, y, z, u) = 0 \\ f(x, y; \alpha_i) = 0 \end{matrix}\right\}$ eine halberstprojizierende Fläche φ_i dar, deren Grundriß die Kurve $f(x, y; \alpha_i) = 0$ der

[1]) Koinzidenzebene nennt man jene Ebene, deren Punkte zusammenfallende Bilder haben. Die Koinzidenzebene ist daher durch das Paar von Gleichungen $x = -z$, $y = -u$ gegeben.

x, y-Ebene ist. Der Kreuzriß von φ_i ist laut Voraussetzung (I) eine Kurve s_i''' der Schar $\mathfrak{s}$, d. h. die Fläche φ_i ist zweifach-halbprojizierend.

Die Bedingung (IA) verlangt nun, daß für den Rechenbereich von x und y es zu jedem Wertepaar (x, y) genau eine zweifach-halbprojizierende Fläche φ_i gibt, deren Risse die durch (I) festgelegten Eigenschaften haben. Außerdem fordert noch Bedingung (IA), daß die Flächen φ_i entweder selbst die Koinzidenzebene $\varkappa$ schneiden oder durch Parallelverschiebung der — durch $F(x, y, z, u) = 0$ bestimmten — Ueberfläche $^1\Psi$ in diese Lage gebracht werden können.

Die Schnittpunkte der Flächen φ_i mit $\varkappa$ liegen in der Schnittkurve von $^1\Psi$ mit $\varkappa$; der Grundriß dieser Kurve hat die Gleichung $F(x, y, -x, -y) = 0$, ihr Kreuzriß hat die Gleichung $F(-z, -u, z, u) = 0$; die beiden Projektionen dieser Kurve sind punktweise identisch. Diese Kurve wird die Koinzidenzlinie k der Ueberfläche $^1\Psi$ genannt. Die Grundrisse bezw. Kreuzrisse der zweifach-halbprojizierenden Flächen φ_i nennen wir die Grundriß- bezw. Kreuzrißordner der Ueberfläche $^1\Psi$. Es ist leicht einzusehen, daß Grundriß- und Kreuzrißordner gleichberechtigt sind; d. h. jeder Kreuzrißordner verbindet alle Punkte doppelter Kote (z, u), die Kreuzrisse von solchen zur Grundrißebene parallelen Schichtenlinien sind, deren Grundriß durch dieselbe Kurve der Schar $f(x, y; \alpha) = 0$ dargestellt wird. Um dies nachzuweisen, lege man durch alle Punkte des Kreuzrißordners φ_i''' Ebenen, die zur Grundrißebene, durch alle Punkte des Grundrißordners φ_i' Ebenen, die zur Kreuzrißebene ganz parallel sind. Die soeben konstruierte einparametrige Schar von Ebenen ganz parallel zur Grundrißebene erfüllt eine Ueberfläche Φ_{1i}; ebenso erfüllen die zur Kreuzrißebene ganz parallelen Ebenen eine Ueberfläche Φ_{2i}. Wir haben so zwei planare[1]) Ueberflächen Φ_{1i} und Φ_{2i} konstruiert und zwar sind dies dreidimensionale, axiale Zylinderräume; die Achse von Φ_{1i} ist die unendlich ferne Gerade der Grundrißebene, die Achse von Φ_{2i} ist die uneigentliche Gerade der Kreuzrißebene. Daher ist Φ_{1i} drittprojizierend, Φ_{2i} erstprojizierend; der Kreuzriß von Φ_{1i} fällt mit dem Kreuzriß φ_i''' der zweifach-halbprojizierenden Fläche φ_i, der Grundriß von Φ_{2i} mit dem Grundriß φ_i' von φ_i zusammen. Daraus folgt, daß die beiden Ueberflächen Φ_{1i} und Φ_{2i} die Fläche φ_i zur Schnittfläche haben, da φ_i in der Ueberfläche $^1\Psi$ liegt, schneiden sich die Uebelflächen Φ_{1i} und $^1\Psi$, ebenso die Ueberflächen Φ_{2i} und $^1\Psi$ längs φ_i. Wir legen nun durch einen Punkt des Kreuzrißordners φ_i''' die zur Grundrißebene ganz parallele Schichtebene. Diese Schichtebene gehört der Ueberfläche Φ_{1i} an, schneidet daher die Ueberfläche $^1\Psi$ in einer Kurve von φ_i. Die zur Grundrißebene parallele Schichtenlinie liegt daher in φ_i; der Grundriß dieser Schichtenlinie fällt also in die Kurve φ_i'; damit ist die Gleichwertigkeit der Grundriß- und Kreuzrißordner bewiesen.

Der zu einem Wertepaar (x_i, y_i) gehörige Kreuzrißordner s_i''' wird durch die Gleichung

$$F(x_i, y_i, z, u) = 0$$

dargestellt; der diesem Kreuzrißordner zugeordnete Grundrißordner f_i wird durch $F(x, y, z_i, u_i) = 0$ dargestellt, wobei der Punkt (z_i, u_i) auf s_i''' liegt. Dieselbe Kurve f_i ergibt sich als Grundrißordner dargestellt durch die Gleichung $f(x, y; \alpha_i) = 0$; hier ist α_i der dem Wertepaar (x_i, y_i) laut (IA) zugeordnete α-Wert. Wenn also die Bedingungen (I) und (IA) erfüllt sind, kann man die Struktur der cartesischen Rechentafel für die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ unmittelbar angeben.

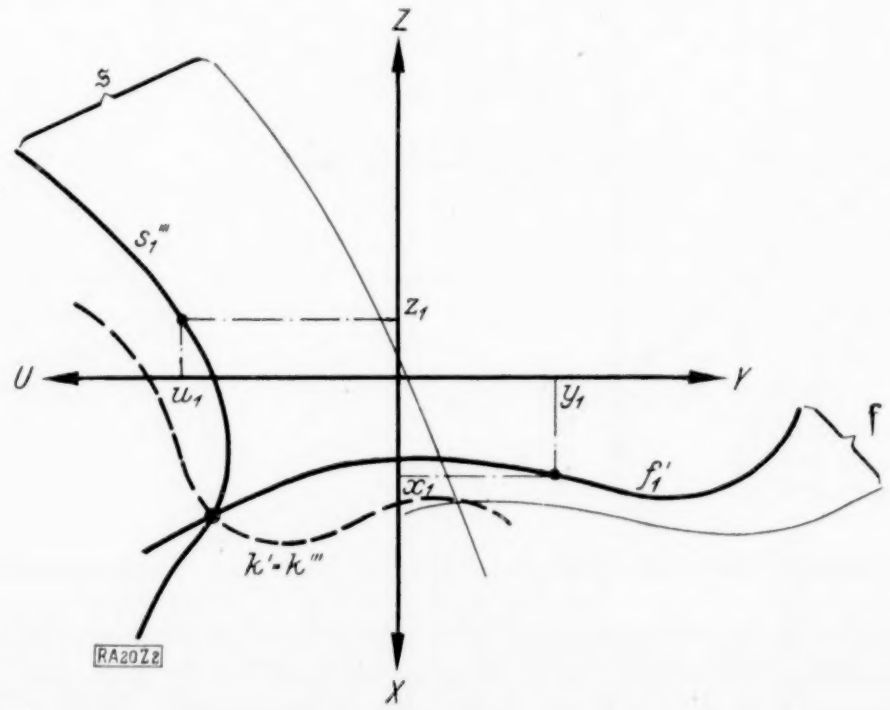


Abb. 2.

In Abb. 2 stellt k die Koinzidenzlinie, s_1''' einen Kreuzriß-

[1]) Eine Ueberfläche des $\mathfrak{R}_4$ heißt eine planare Ueberfläche, wenn sie durch eine einparametrige Ebenenschar beschrieben wird. Die planaren Ueberflächen sind also in gewissem Sinne mehrdimensionale Verallgemeinerungen der Regelflächen.

ordner, f_1' einen Grundrißordner der durch $F(x, y, z, u) = 0$ dargestellten Ueberfläche Ψ dar. Außerdem zeigt die Abbildung, wie man zu gegebenen Werten von drei der Veränderlichen den Wert der vierten bestimmen kann [z. B. zu (x_1, y_1, z_1) das u_1].

Bei allen Nomogrammen der soeben angegebenen Struktur bilden die Schichtenlinien (Ordner) f' und s''' je eine einparametrige Kurvenschar, während sie ja in den allgemeinen Fällen zweiparametrige Kurvenscharen bilden. Die Kurve k, die Koinzidenzlinie der Ueberfläche Ψ, die ja bei allen Tafeln dieses Typus auftritt, kann man als Zapfenlinie, unsere Rechentafel als kartesische Rechentafel mit Zapfenlinie auffassen. Tafeln dieser Struktur treten bei d'Ocagne[1]) auf als »allgemeinste Nomogramme mit Linienkreuzung bei verzweigten Systemen«; Spezialfälle als »Tafeln mit vereinigten binären Skalen« bei d'Ocagne[2]) als »vereinigte kartesische Rechentafeln« bei Schilling[3]) und Lacmann[4]). Für diese Nomogramme d'Ocagnes haben wir nun eine räumliche Deutung erhalten.

3. Erstes Beispiel: Die lineare Gleichung. Wir wollen nun einen Spezialfall der durch die Bedingungen (I) und (I A) fixierten Tafeln betrachten, wir setzen nämlich voraus, daß die Gleichung in allen Veränderlichen linear ist. Es sei also

$$F(x, y, z, u) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u + 1 = 0$$

die Gleichung einer Ueberebene.

Dann wird auch $f(x, y; \varepsilon) = 0$ linear werden und man findet die Gleichung $x(\alpha - \gamma) + y(\beta - \delta) + 1 = 0$ für die Koinzidenzgerade. Die Gleichung des dem Grundrißpunkt (x_i, y_i) zugeordneten Kreuzrißordners ist dann durch $\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z + \delta u + 1 = 0$ gegeben; der zugehörige Grundrißordner hat die Gleichung $\alpha x + \beta y + \varepsilon_i = 0$, wobei $\varepsilon_i = -\alpha x_i - \beta y_i$ ist. Die Gleichung des Grundrißordners zu einem Kreuzrißpunkt (z_i, u_i) ist durch $\alpha x + \beta y + \gamma z_i + \delta u_i + 1 = 0$ gegeben. Diese Verhältnisse veranschaulicht Abb. 3.

Die Koinzidenzlinie ist eine Gerade, die Ordner bilden zwei ähnliche Parallelstrahlbüschel mit der Koinzidenzlinie als Perspektivachse. Die Koinzidenzgerade und die

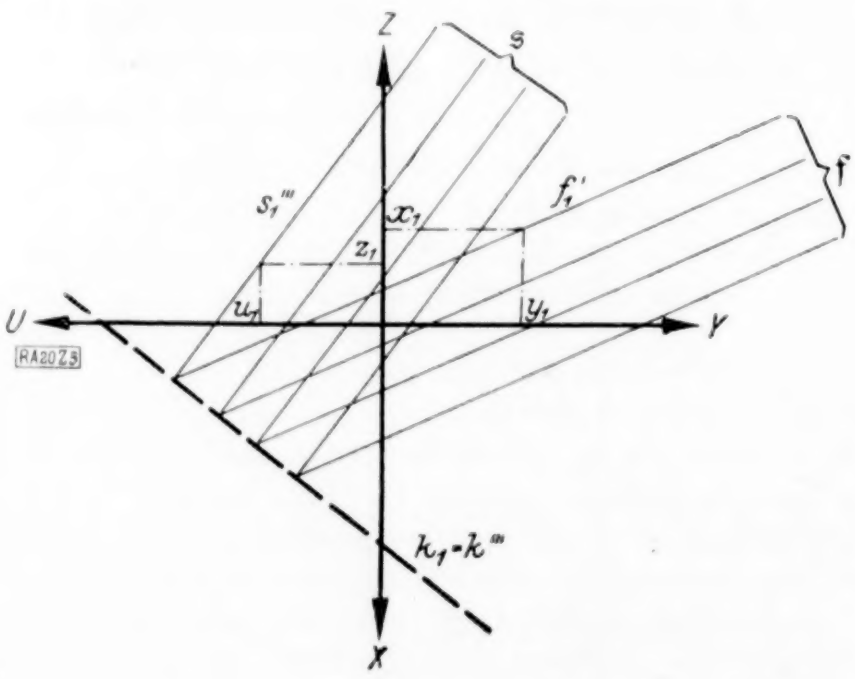


Abb. 3.

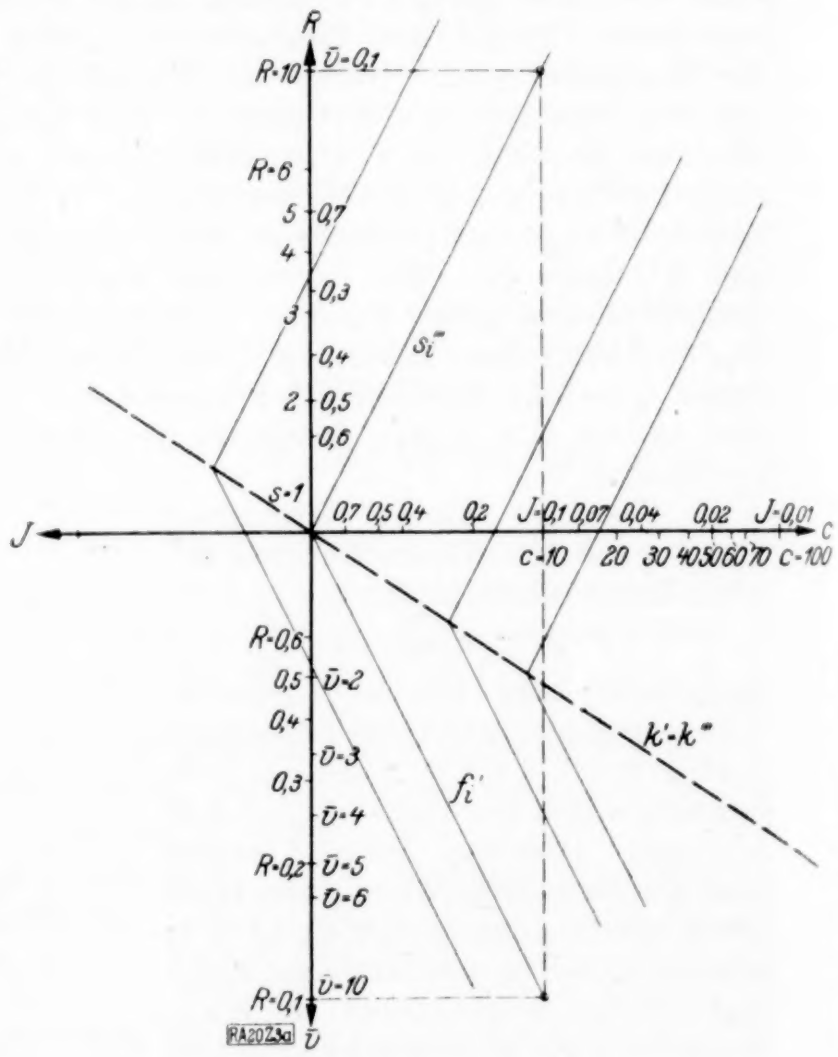


Abb. 3a.

---

[1]) M. d'Ocagne: Calcul graphique et Nomographie. Paris 1908. S. 204 No. 57. Systèmes ramifiés. Nomogrammes à lignes concourantes les plus généraux. (Siehe auch a. a. O. Fig. 91.)

[2]) M. d'Ocagne: Traité de Nomographie. Paris 1899. Chapitre V No. 117: Échelles binaires accolées, page 300—304 Beispiel No. 118 pg. 304—311. Nahezu dasselbe bringen:

[3]) F. Schilling: Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne. Leipzig 1922. § 5. II Vereinigte kartesische Rechentafeln. S. 34 ff. (Fig. 21) und

[4]) O. Lacmann: Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Berlin 1923. Kapitel V A, S. 75 bis 78. Ueber Rechentafeln mit Linienkreuzung, die durch Verbinden mehrerer kartesischer Tafeln entstehen.

Ordnerbüschel haben hier darstellend geometrisch die gleiche Bedeutung wie in der bereits zitierten Abhandlung von Schmid[1]). Die Abb. 3a zeigt ein Nomogramm dieser Art für die Wassergeschwindigkeit in Flüssen $\bar{v} = c\sqrt{R \cdot J}$; bezüglich dieser Formel sei auch auf Anm. 2 verwiesen.

Auf diesen linearen Fall sind zahlreiche Nomogramme durch Transformation zurückführbar. Zahlreiche Rechentafeln, die von technischer Bedeutung sind, gehören zu diesem — praktisch vielleicht wichtigsten — Typus[2]).

4. Die Hüllkurventafeln. Falls die Bedingungen (I) und (IA) nicht erfüllt sind, kann man kein Nomogramm von so einfacher Gestalt erhalten; immerhin läßt sich die Struktur der Tafel leicht angeben, wenn die Funktion eine der Bedingungen, die wir im folgenden formulieren wollen, erfüllt.

(II). Für alle (x, y)-Werte des Rechenbereiches soll die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ die Eigenschaft haben, daß für konstantes y, bei variablem Parameter x, jede Kurvenschar $F(x, y, z, u) = 0$ eine Einhüllende $u_x(y)$ besitzt.

(IIa). Es soll nicht nur die Bedingung (II) erfüllt sein, sondern es soll auch die Kurvenschar der durch (II) geforderten Einhüllenden $u_x(y)$ — die nun y zum Parameter hat — wieder eine Einhüllende u_y besitzen.

(IIb). Es soll nicht nur die Bedingung (II) erfüllt sein, sondern es sollen auch die Kurven der Schar $u_x(y)$ Rückkehrpunkte beziehungsweise mehrfache Punkte haben, die bei variablem Parameter y eine Kurve v_y erfüllen.

Bei konstantem x und y, $x = x_i$, und $y = y_i$, stellt $F(x_i, y_i, z, u) = 0$ den Kreuzriß der zum Grundrißpunkt (x_i, y_i) gehörigen Schichtenlinie dar. Diese Kurve berührt die Kurve $u_x(y_i)$ in einem Punkte, den wir mit x_i kotieren wollen. Wenn bloß die Bedingung (II) erfüllt ist, versehen wir jede Kurve $u_x(y_i)$ mit dem Werte y_i als Kote. Wenn die Bedingung (IIa) erfüllt ist, fügen wir dem Berührungspunkt einer jeden Kurve $u_x(y_i)$ mit der Kurve u_y den zur Kurve $u_x(y_i)$ gehörigen y-Wert y_i als Kote hinzu. Wenn die Bedingung (IIb) erfüllt ist, werden die Punkte der Kurve v_y mit den Werten der Variablen y kotiert. Dabei erhält jener Punkt von v_y die Kote y_i, in dem die Kurve $u_x(y_i)$ eine Singularität besitzt. Nun kann man leicht zu dem Wertetripel (x_i, y_i, z_i) die Werte u_i finden, die ihnen die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ zuordnet. Dies ist in der Abb. 4, die die Struktur der Tafeln (IIa) zeigt, auch eingezeichnet. Die Kurven $u_x(y_i)$ sind im Kreuzriß die scheinbaren Umrisse der Flächen ψ_y, die sich als Schnittflächen der — durch $F(x, y, z, u) = 0$ bestimmten Ueberfläche Ψ mit den Ueberebenen $y = y_i = \text{const.}$ ergeben. Die Kurve u_y ist im Kreuzriß der scheinbare Umriß von Ψ, während die Kurve v_y keine räumliche Bedeutung hat.

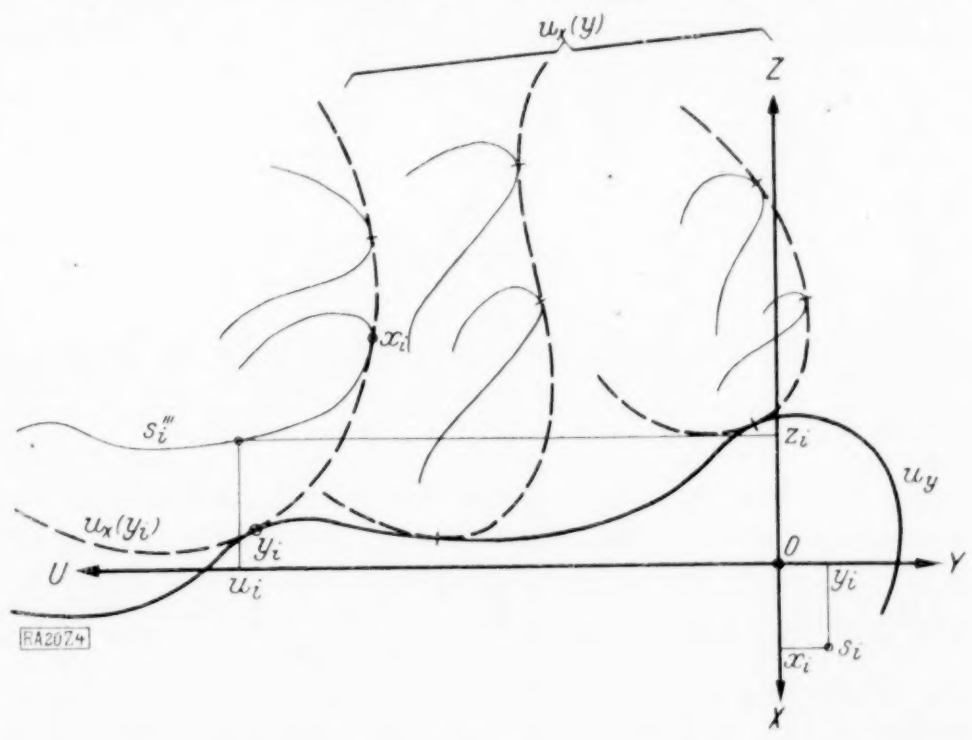


Abb. 4.

Die Bedingung (II) fordert die Existenz der scheinbaren Umrisse der Flächen ψ_y; Bedingung (IIa) überdies die Existenz des scheinbaren Umrisses von Ψ. — Diese Tafeln haben, wie Abb. 4 zeigt, eine

[1]) Th. Schmid: Ueber die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes. Wiener Akademieberichte Abt. IIA; 137. Band, 9. und 10. Heft (1928).

[2]) Ein Beispiel ist die durch Abb. 3a dargestellte Formel für die Wassergeschwindigkeit in Flüssen $\bar{v} = c\sqrt{RJ}$, $\bar{v}$ bedeutet hier die Geschwindigkeit, R den hydraulischen Halbmesser, J das Gefälle, c ist ein variabler, jedoch im einzelnen Fall der Verwendung bekannter Koeffizient. Die angeführte Formel läßt sich durch Logarithmieren in die Form einer linearen Gleichung bringen. Das Nomogramm hat dann den Typus der Abb. 3; an Stelle der gleichmäßigen Skalen treten jedoch logarithmische. Für $J = 0{,}1$, $R = 10$, $c = 10$ ergibt sich $\bar{v} = 10$. Die Formel des Beispiels ist dem bereits zitierten Buche von Lacmann entnommen (S. 95); es ließen sich noch leicht weitere technische Beispiele angeben.

recht komplizierte Struktur; praktisch verwendbar werden sie wohl erst wenn die Kurven $u_x(y)$ oder die Kurven s_i''' einfach werden, sich zum Beispiel auf Kreise, Gerade oder Punkte reduzieren.

Wir wollen nun als Beispiel für eine Tafel, die die Bedingung (IIb) erfüllt, ein Nomogramm zur Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung konstruieren.

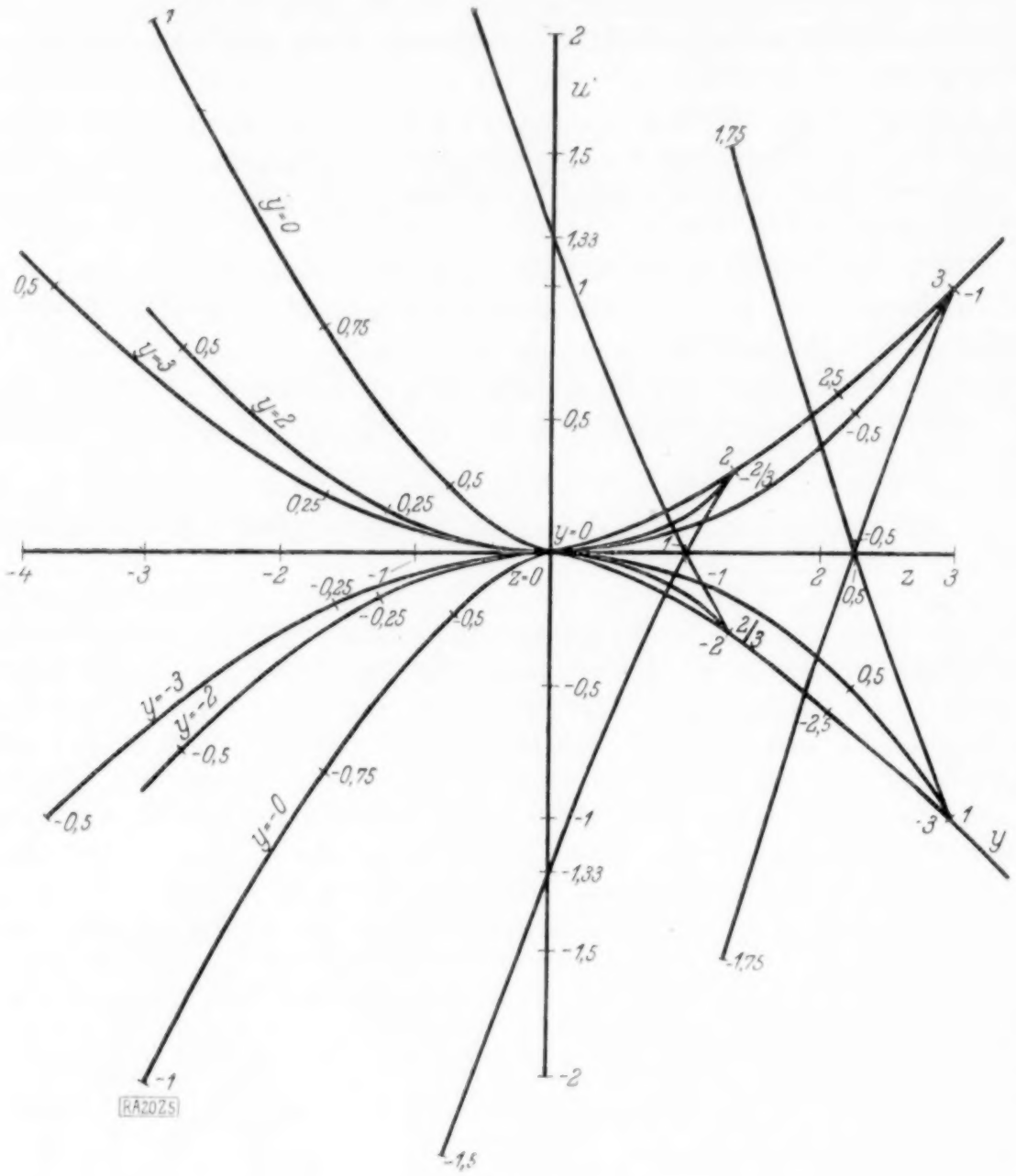


Abb. 5.

Die vollständige kubische Gleichung. (Abbild. 5).

Es sei $F(x, y, z, u) \equiv x^3 + y x^2 + z x + u = 0$ die gegebene Funktion, es soll ein Nomogramm konstruiert werden, das gestattet die (reellen) x-Werte abzulesen, die zu einem Wertetripel (y, z, u) gehören. Bei konstanten Parametern x und y ist die Gleichung linear, die Kreuzrisse der Schichtenlinien sind daher Gerade. Diese Schichtenlinien bilden eine zweiparametrige Geradenschar mit x und y als Parametern. Die einparametrige Geradenschar, die man erhält, wenn y festbleibt und x allein als variabel betrachtet wird, besitzt eine Einhüllende, deren Gleichung man erhält, indem man aus

$$F(x, y, z, u) = 0$$

und $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ die Variable x eliminiert. Es ist $F(x, y, z, u) \equiv x^3 + y x^2 + z x + u = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 3 x^2 + 2 y x + z = 0$ daraus ergibt sich $\left.\begin{matrix} z = -3 x^2 - 2 y x \\ u = 2 x^3 + y x^2 \end{matrix}\right\}$ als Parameterdarstellung der Kurve $u_x(y)$, dabei ist y fest und x der variable Parameter; ein jeder Punkt von $u_x(y)$ erhält den zugehörigen Parameterwert x als x-Kote. Für $x = 0$ ist für jedes y auch $z = 0$ und $u = 0$, es gehen daher alle Kurven $u_x(y)$ durch den Ursprung. Wenn wir aus den Gleichungen $\begin{matrix} z = -3 x^2 - 2 y x \\ u = 2 x^3 + y x^2 \end{matrix}$ die Variable x eliminieren, erhalten wir die Gleichung $f(z, u, y) \equiv 4 (y^2 - 3 z)^3 - (27 u - 9 z y + 2 y^3) = 0$ als Gleichung der Kurvenschar $u_x(y)$, wobei y der variable Parameter ist. Die Kurven sind also von der dritten Ordnung, sie sind aber auch gleichzeitig von der dritten Klasse. Es gibt nämlich zu jedem Wertetripel (y, z, u) drei durch die kubische Gleichung zugeordnete x-Werte. Daher kann man aus einem jeden Punkt der Kreuzrißebene drei Tangenten an jede Kurve $u_x(y)$ legen; das heißt ja die Kurven $u_x(y)$ sind von der dritten Klasse Aus der ersten Plückerschen Formel[1]) für algebraische Kurven folgt der Satz, daß eine jede Kurve,

[1]) $k = n(n-1) - 2d - 3r$; hierbei bedeutet k die Klasse, n die Ordnung, d die Anzahl der Doppelpunkte, r die Anzahl der Rückkehrpunkte der algebraischen Kurve. Selbstverständlich kann man auch durch Betrachtung der zweiten Ableitungen von f, ohne die Plückerschen Formeln zu benutzen, nachweisen, daß die Singularitäten der Kurven $u_x(y)$ Rückkehrpunkte sind.

die zugleich von der dritten Ordnung und von der dritten Klasse ist, einen Rückkehrpunkt hat. Wir wollen nun die Kurve v_y, die von den Rückkehrpunkten gebildet wird, durch ihre Gleichung festlegen. Ein singulärer Punkt der Kurve $u_x(y)$ muß Koordinaten haben, die gleichzeitig den drei Gleichungen

$$f(z, u, y) = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

genügen. Eine einfache Rechnung ergibt die beiden Gleichungen

$$z = {}^1/_3\, y^2\,, \qquad u = {}^1/_{27}\, y^3$$

als Gleichungen der Kurve v_y in Parameterdarstellung, ein jeder Punkt von v_y erhält den zugehörigen Parmeterwert als y-Kote.

Das so erhaltene Nomogramm[1]) ist bezüglich der z-Achse symmetrisch; aus der Parameterdarstellung der Kurven $u_x(y)$ sieht man ja, daß durch die Transformation $y = -\bar{y}$, $x = -\bar{x}$ sich $z = \bar{z}$ und $u = -\bar{u}$ ergibt (Abb. 5).

5. Die Verwandtschaftstafeln. Falls weder die Bedingungen (I) und (IA), noch die Bedingungen (II) bezw. (IIa) oder (IIb) erfüllt sind, kann man die Struktur des Nomogrammes nicht mehr unmittelbar angeben.

In diesem allgemeinsten Fall erhalten wir zwei Punkt-Kurvenverwandtschaften in der Zeichenebene. Jedem Punkt der Zeichenebene, als Punkt $(x_i\, y_i)$ der Grundrißebene aufgefaßt, entspricht eine Kurve $F(x_i, y_i, z, u) = 0$ in der Kreuzrißebene; nämlich der Kreuzriß jener Schichtenlinie, deren Grundriß der Punkt (x_i, y_i) ist. Ebenso entspricht jedem Punkte der Kreuzrißebene eine Kurve der Grundrißebene. Diese beiden Punkt-Kurvenverwandtschaften sind nichts anderes als das Bild der Ueberfläche $\mathcal{U}$, die durch die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ bestimmt wird. In diesem allgemeinsten Fall ist die Konstruktion und Handhabung der Rechentafeln sehr umständlich; Vereinfachungen könnte wohl manchmal die mehrdimensionale darstellende Geometrie der Ueberflächen bieten. Im allgemeinen kann man wohl sagen, daß diese Tafeln nur dann praktische Bedeutung gewinnen können, wenn die dem Nomogramm zugrundeliegende Punkt-Kurvenverwandtschaft sehr einfach ist. Ist zum Beispiel die Verwandtschaft eine Polarität in bezug auf eine algebraische Kurve, so kann mit Hilfe dieser Kurve die Zuordnung vollzogen werden; im Fall einer Korrelation kann man hierzu den Punktkernkegelschnitt und den Geradenkernkegelschnitt benutzen.

Beispiel. Wir wollen ein Nomogramm für $F(x, y, z, u) \equiv x\, z + u\, y - c = 0$ konstruieren, wobei c eine Konstante sein soll, die wir im Fall der Abb. 6 als $c = -25$ gewählt haben.

Beide Verwandtschaften sind in diesem Beispiel mit der Polarität des Kreises k, der durch $x^2 + y^2 = 25$ bestimmt ist, identisch.

Dem Punkte (x, y) als Grundriß s' einer Schichtenlinie s ist seine Polare s''' in bezug auf k, als Kreuzriß von s zugeordnet. Die Abb. 6 zeigt noch, daß dem Wertetripel $(x = -2,\ y = 7,\ z = 9)$ der Wert $u = -1$ zugeordnet ist. Zur Ablesung wäre der Polarograph von A. Wlassoff anzuwenden. [Zeitschrift für Mathe-

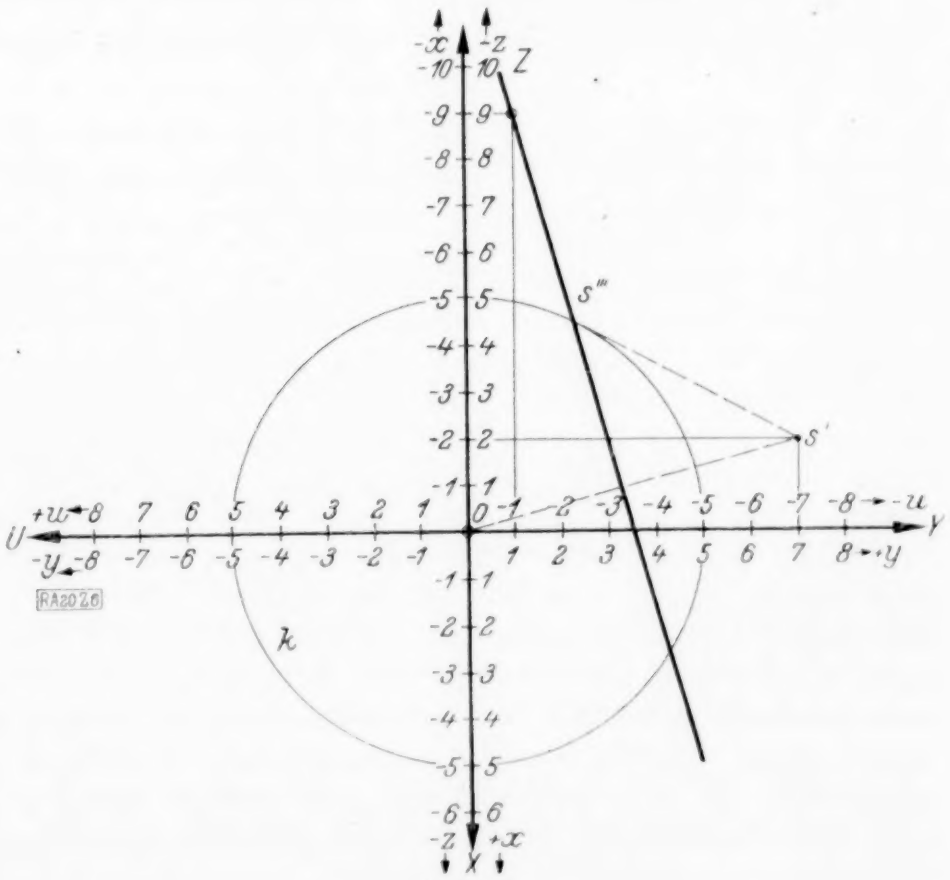


Abb. 6.

[1]) Unsere Tafel enthält die Lalannesche Tafel zur Auflösung der reduzierten kubischen Gleichung als Teil, wie man unmittelbar sieht, wenn man $y = 0$ setzt. — Siehe L. Lalanne: Mémoire sur les tables graphiques (Paris 1846), Nr. 23. Ferner planche 99, Fig. 1.

matik und Physik, 54. Band (1907)] — Wir haben nun eine Klassifikation der Nomogramme vom Standpunkt der mehrdimensionalen darstellenden Geometrie erhalten; die darstellend-geometrische Behandlungsweise gibt jedoch noch zu weiteren theoretischen Fragen Anlaß, insbesondere zu solchen, die den Zusammenhang des darstellend-geometrischen Nomogrammbegriffes mit dem d'Ocagneschen Nomogrammbegriff betreffen. Diese Probleme mögen einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben*). 20

Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen durch Elimination aufzulösen.

Von **R. MEHMKE** in Stuttgart.

1. Einleitung. Die hergebrachte und immer noch allgemein übliche Art, aus einer Kette linearer Gleichungen die Unbekannten dadurch zu bestimmen, daß man diese schrittweise bis auf eine von ihnen aus den Gleichungen entfernt, ist bekanntlich folgende. Durch paarweises Zusammenfassen der n vorgelegten Gleichungen mit n Unbekannten und jedesmaliges Entfernen einer und derselben Unbekannten bildet man eine neue Kette mit nur $(n-1)$ Gleichungen und ebensovielen Unbekannten. Auf entsprechende Weise entfernt man hierauf eine zweite der Unbekannten aus der zweiten Gleichungskette, und man wiederholt dieses Verfahren, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, welche Unbekannte damit gefunden ist. Ihren Wert setzt man in eine der Gleichungen ein, die außer dieser Unbekannten nur noch eine einzige weitere enthalten, wodurch sich eine zweite Unbekannte ergibt, usw. Dieses Rückwärtseinsetzen ist bei einer nicht ganz kleinen Zahl von Gleichungen wohl der unangenehmste Teil der Arbeit. Einen besseren Weg, bei dem nachweislich mindestens $^1/_5$ an Multiplikationen gespart wird und man durch zahlreiche Proben, die sich auf Schritt und Tritt ergeben, gegen Rechenfehler geschützt ist, — noch einige andere Vorteile kommen hinzu (vergl. Nr. 7 und 8) — hat nun schon vor langen Jahren B. J. Clasen gezeigt[1]), er scheint jedoch bei uns völlig unbeachtet geblieben zu sein. Die folgende Mitteilung bezweckt, nicht nur an Clasens Verfahren zu erinnern, sondern überdies zu zeigen, wie man es zweckmäßig durchführen, auch durch Hinzunahme des beschleunigten Eliminierens noch verbessern kann.

2. Clasens Verfahren. In Buchstaben geschrieben, mit $x, y, z, u, \ldots$ als Zeichen für die Unbekannten, seien die vorgelegten Gleichungen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + \ldots = k_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + \ldots = k_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u + \ldots = k_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots$ wie auch die Konstanten k_i Zahlen sind, so ist es der Proben wegen ratsam, nötigenfalls durch Multiplikation der Gleichungen mit geeigneten Potenzen von 10, dafür zu sorgen, daß jene Zahlen sämtlich in ganzen Zahlen bestehen. Ferner ist zu empfehlen, daß man vor Beginn der Arbeit einen Plan, an den man sich beim Ausrechnen hält, in Worten aufschreibt, etwa so wie nachher vorgeschlagen werden wird. Wir teilen alles in Schritte ein, von denen wir mehrere zu einem Gang zusammenfassen. Der m-te Gang dient dazu, den $(m-1)$ ersten Gleichungen eine solche Form zu geben, daß in jeder nur eine von den $(m-1)$ ersten Unbekannten vorkommt. Wenn eine solche Stufe erreicht ist, so müssen die Vorzahlen der fraglichen Unbekannten in den umgeformten Gleichungen infolge davon daß, wenn man durchweg mit ganzen Zahlen rechnet, gewisse Divisionen ohne Rest aufgehen, einander gleich werden. Das führt zu den erwähnten Proben und kennzeichnet wohl am besten Clasens Verfahren, weshalb dieses auch von P. Mansion in seinem Bericht, welcher der Abhandlung von Clasen angehängt ist, »la méthode des coefficients égaux« genannt wird. Bei n Gleichungen und Unbekannten ist nach $(n-1)$ Gängen die Arbeit beendigt. Im großen und ganzen

*) Meinem verehrten Lehrer, Herrn Hofrat Professor Th. Schmid, danke ich für wertvolle Ratschläge und die Förderung, die er mir bei Abfassung dieser Arbeit hat angedeihen lassen.

[1]) B. J. Clasen, Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants, Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 12e année, 1887 — 1888, Paris 1889, Gauthier-Villars et fils.

sind hiermit schon die Eigentümlichkeiten des Verfahrens beschrieben und wir können zu den Einzelheiten übergehen. Bemerkt werde nur noch, daß man keineswegs, wie es die Lehrbücher der Algebra verlangen, vor Beginn der Arbeit zu untersuchen braucht, ob die vorgelegten Gleichungen mit einander verträglich oder vielleicht sogar abhängig voneinander sind, mit andern Worten, daß es nicht nötig ist, den Rang der zu den Gleichungen gehörigen Matrix zu ermitteln, daß vielmehr all' dies von selbst sich ergibt (vergl. die Beispiele in Nr. 7 und 8).

3. Vorbereitung bei Clasens Verfahren. Um die Buchstaben $x, y, z, \ldots$ nicht wiederholt schreiben zu müssen, wird man, am besten auf quadriertem Papier, einen Rahmen (ein »Schema«) anlegen, worin je eine Spalte für die Nummer der Gleichung, die Vorzahl von x, diejenige von y, von $z, \ldots$ sowie für die Konstante k vorgesehen und jeder Gleichung — den gegebenen Gleichungen wie den durch Umformung daraus hergeleiteten — eine Zeile eingeräumt ist. Die Zeilen beziffert man am besten schon im voraus, nämlich der Reihe nach mit (1), (2); (1_2), (2_2), (3); (1_3), (2_3), (3_3), (4); (1_4), (2_4), (3_4), (4_4), (5); ... Dagegen braucht man die Vorzahlen und die Konstante irgendeiner der gegebenen Gleichungen — der Gleichungen (1), (2), ... — erst in den Rahmen einzutragen, wenn die betreffende Gleichung an die Reihe kommt. Bequem ist es, Vorzahlen und Konstante der jedesmal sich beim ersten Schritt eines Ganges ergebenden Gleichung — es handelt sich um die Gleichungen (2_2), (3_3), (4_4), ... allgemein (m_m) — vorläufig auf den unteren Rand eines Papierstreifens zu schreiben, um sie bei den Eliminationen der folgenden Schritte desselben Ganges über die gerade zur Verwendung kommende Gleichung, nämlich beim $(m-1)$-ten Gang der Reihe nach über (1_m), (2_m), (3_m), ... halten zu können; in die richtige, dafür vorgesehene Zeile eintragen wird man sie erst nach Beendigung des betreffenden Ganges.

4. Arbeitsplan bei Clasens Verfahren. Auf Grund zahlreicher Versuche kann empfohlen werden, vorzugehen wie folgt.

1. Gang. 1. Schritt. (Trage die Zahlen der Gleichungen (1) und (2) in den Rahmen ein.) Entferne x aus (1) und (2), gibt (2_2). (Papierstreifen!)

2. Schritt. (Halte den Streifen mit (2_2) über (1).) Entferne y aus (2_2) und (1), gibt (1_2). (Proben!) [2])

2. Gang. 3. Schritt. Nimm (3) hinzu, entferne x und y gleichzeitig aus (1_2), (2_2) und (3), gibt (1_3). (Papierstreifen!)

4. Schritt. (Halte den Papierstreifen mit (3_3) über (1_2).) Entferne z aus (3_3) und (1_2), gibt (1_3). (Proben!)

5. Schritt. (Halte den Papierstreifen mit (3_3) über (2_2).) Entferne z aus (3_3) und (2_2), gibt (2_3). (Proben!) (Trage die Zahlen von (3_3) in die zugehörige Zeile ein.)

3. Gang. 6. Schritt. Nimm (4) hinzu, entferne x, y und z gleichzeitig aus (1_3), (2_3), (3_3) und (4), gibt (4_4). (Papierstreifen!)

7. Schritt. (Halte den Papierstreifen mit (4_4) über (1_3)) Entferne z aus (4_4) und (1_3), gibt (1_4). (Proben!)

8. Schritt. (Halte den Papierstreifen mit (4_4) über (2_3).) Entferne z aus (4_4) und (2_3), gibt (2_4). (Proben!)

9. Schritt. (Halte den Papierstreifen mit (1_4) über (3_3).) Entferne z aus (4_4) und (3_3), gibt (3_4). (Proben!) (Trage (4_4) in die zugehörige Zeile ein.)

4. Gang. 10. Schritt. Nimm (5) hinzu, entferne gleichzeitig x y, z und u aus (1_4), (2_4), (3_4), (4_4) und (5), gibt (5_5). (Papierstreifen!)

11. Schritt. (Halte den Papierstreifen mit (5_5) über (1_4).) Entferne u aus (5_5) und (1_4), gibt (1_5). (Proben!) Usw.

5. Beispiel. Seien die fünf Gleichungen mit den fünf Unbekannten x, y, z, u, v aufzulösen:

(Beispiel von Clasen)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + u + 3v = 13 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ x + 2y - 3z + 4u - 5v = -15 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x - 5y + 7z + 2u - 3v = 18 & \ldots\ldots\ldots (3) \\ 5x - y + 4z + 8u + 2v = -2 & \ldots\ldots\ldots (4) \\ 4x + 7y - 2z + 3u + 114v = -12 & \ldots\ldots\ldots (5). \end{cases}$$

[2]) Man könnte beim 2. Schritt auf die entsprechende (also gewöhnliche) Weise y aus (1) und (2) entfernen, wie es Clasen und Mansion auch tun, aber man ginge dann der ersten Proben verlustig und es wird, wenn man den 2. Schritt nach obigem Vorschlag ausführt, also von Anfang an Clasens Gedanken folgt, alles gleichmäßig.

Zu der nachstehenden, mit einer Hamannschen Rechenmaschine »Mercedes-Euklid« durchgeführten Ausrechnung werde folgendes bemerkt.

Bemerkung zum 1. Schritt. Das Entfernen von x aus (1) und (2) geschieht auf die gewöhnliche Weise durch Multiplizieren von (1) mit -1, von (2) mit 2, und Addieren, so daß die entstehende Gleichung dargestellt werden kann, wie folgt:

$$(2_2) = -(1) + 2 \cdot (2).$$

Bemerkungen zum 2. Schritt. Die sich ergebenden Proben bestehen darin, daß man, um y aus (2_2) und (1) zu entfernen, $7 \cdot (1) - 3 \cdot (2_2)$ bildet, die Vorzahlen von z, u, v und die Konstante sich alle durch die Vorzahl von x in (1), also 2, ohne Rest müssen teilen lassen. Man wird deshalb als Faktoren nicht 3 und 7, sondern 3/2 und 7/2 neben die betreffenden Zeilen schreiben und verwenden, so daß die entstehende Gl. (1_2) sich darstellen läßt durch:

$$(1_2) = \frac{7 \cdot (1) + 3 \cdot (2_2)}{2}.$$

Bemerkungen zum 3. Schritt. Das gleichzeitige Entfernen von x und y aus (1_2), (2_2) und (3) geschieht, indem man (1_2) und (2_2) mit den negativen Vorzahlen von x und y in (3), also -3 und 5, dagegen (3) mit der gemeinsamen Vorzahl von x und y in (1_2) und (2_2), also 7, multipliziert und alsdann die erhaltenen Gleichungen addiert, in Zeichen:

$$(3_3) = -3 \cdot (1_2) + 5 \cdot (2_2) + 7 \cdot (3)\ ^{3}).$$

Bemerkungen zum 4. Gang. Die Vorzahlen von x und y in (1_3) und (2_3) müssen gleich der Vorzahl von z in (3_3) werden. Deshalb müssen die Vorzahlen von u und v sowie die Konstante in den linearen Verbindungen $-(3_3) - 9 \cdot (1_2)$ und $11 \cdot (3_3) - 9 \cdot (2_2)$, die man zum Entfernen von z bilden sollte, von selbst durch 7, die gemeinsame Vorzahl von x und y in (1_2) und (2_2), ohne Rest teilbar sein. weshalb man von vornherein als Faktoren $-1/7$ und $-9/7$ bzw. $11/7$ und $-9/7$ nehmen wird. Es läßt sich dann schreiben:

$$(1_3) = \frac{-(3_3) - 9 \cdot (1_2)}{7}, \qquad (2_3) = \frac{11 \cdot (3_3) - 9 \cdot (2_2)}{7}.$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Proben, die nach dem 7-ten, 8-ten und 9-ten Schritte des 3-ten Ganges und den entsprechenden Schritten der späteren Gänge anzustellen sind, weshalb die bisherigen Bemerkungen genügen werden.

Ausrechnung des Beispiels. Die einzelnen Gänge seien zunächst getrennt vorgeführt, um die allmähliche Entstehung der umgeformten Gleichungen deutlich erkennen zu lassen. Dazu ist nötig, die neu erhaltenen Zeilen mehrmals zu wiederholen, weshalb das Ganze vorerst verwickelter erscheint, als es in Wirklichkeit ist. Die bei den einzelnen Schritten gebrauchten Faktoren könnten selbstverständlich statt links von den Nummern der Gleichungen auch rechts von den Konstanten geschrieben werden, oder teilweise links, teilweise rechts.

1. Gang.

Faktoren 2. Schritt	Faktoren 1. Schritt	Nr.	x	y	z	u	v	k
7/2	-1	(1)	2	-3	5	1	3	13
	2	(2)	1	2	-3	4	-5	-15
		(1_2)	7		1	14	-9	-19
3/2		(2_2)		7	-11	7	-13	-43

1. Papierstreifen.

3/2		(2_2)		7	-11	7	-13	-43

[3]) Es kann wünschenswert erscheinen, daß die gemeinsamen Vorzahlen in den umgeformten Gleichungen positiv werden. Stellt sich heraus, daß in der Gleichung (m_m) die m-te Unbekannte negatives Vorzeichen bekommt, so wird, wer das vermeiden möchte, die Vorzeichen der Faktoren, die zur Bildung dieser Gleichung gedient haben, umkehren. So ist es in unserm Beispiel beim 3. Gang geschehen. Allerdings werden dadurch auch die Vorzeichen der Determinanten, die man bei der (zwar nicht zu empfehlenden) Auflösung mit Hilfe solcher berechnen müßte, umgekehrt, aber das kommt hier kaum in Betracht.

2. Gang.

Faktoren			Nr.	x	y	z	u	v	k
5. Schritt	4. Schritt	3. Schritt							
	9/7	3	(1_2)	7		1	14	− 9	− 19
9/7		− 5	(2_2)		7	− 11	7	− 13	− 43
		− 7	(3)	3	− 5	7	2	− 3	18
			(1_3)	9			19	− 20	− 29
			(2_3)		9		− 2	76	− 5
11/7	− 1/7		(3_3)			9	− 7	59	32

2. Papierstreifen.

11/7	− 1/7		(3_3)			9	− 7	59	32

3. Gang.

Faktoren				Nr.	x	y	z	u	v	k
9. Schritt	8. Schritt	7. Schritt	6. Schritt							
		3/9	− 5	(1_3)	9			19	− 20	− 29
	3/9		1	(2_3)		9		− 2	76	− 5
3/9			− 4	(3_3)			9	− 7	59	32
			9	(4)	5	− 1	4	8	2	− 2
				(1_4)	3				82	3
				(2_4)		3			16	− 3
				(3_4)			3		− 13	6
7/9	2/9	− 19/9		(4_4)				3	− 42	− 6

3. Papierstreifen.

7/9	2/9	− 19/9		(4_4)				3	− 42	− 6

4. Gang.

Faktoren					Nr.	x	y	z	u	v	k
14. Schritt	13. Schritt	12. Schritt	11. Schritt	10. Schritt							
			2/3	4	(1_4)	3				82	3
		2/3		7	(2_4)		3			16	− 3
	2/3			− 2	(3_4)			3		− 13	6
2/3				3	(4_4)				3	− 42	− 6
				− 3	(5)	4	7	− 2	3	114	− 12
					(1_5)	2					− 80
					(2_5)		2				− 18
					(3_5)			2			17
					(4_5)				2		38
42/3	13/3	− 16/3	− 82/3		(5_5)					2	3

4. Papierstreifen.

42/3	13/3	− 16/3	− 82/3		(5_5)					2	3

Die wirkliche Ausführung zeigende Wiederholung:

Faktoren														Nr.	x	y	z	u	v	k
											2. Schr.									
											7/2		− 1	(1)	2	− 3	5	1	3	13
										4 Schr.			2	(2)	1	2	− 3	4	− 5	− 15
									5. Schr.	9/7			3	(1_2)	7		1	14	− 9	− 19
									9/7			· 3/2	− 5	(2_2)		7	− 11	7	− 13	− 43
								7. Schr.					− 7	(3)	3	− 5	7	2	− 3	18
							8. Schr.	3/9					− 5	(1_3)	9			19	− 20	− 29
						9. Schr.	3/9						1	(2_3)		9		− 2	76	− 5
						3/9			11/7	− 1/7			− 4	(3_3)			9	− 7	59	32
					11. Schr								9	(4)	5	− 1	4	8	2	− 2
				12. Schr.	2/3								− 4	(1_4)	3				82	3
			13. Schr.	2/3									− 7	(2_4)		3			16	− 3
		14. Schr.	2/3										2	(3_4)			3		− 13	6
		2/3							7/9	2/9	− 19/9		− 3	(4_4)				3	− 42	− 6
													3	(5)	4	7	− 2	3	114	− 12
														(1_5)	2					− 80
														(2_5)		2				− 18
														(3_5)			2			17
														(4_5)				2		38
42/3		13/3		− 16/3		− 82/3								(5_5)					2	3

Ergebnis: $x = -40$; $y = -9$; $z = 8{,}5$; $u = 19$; $v = 1{,}5$.

6. Clasens Verfahren in Verbindung mit beschleunigtem Eliminieren. Mit beschleunigtem Eliminieren ist ein Verfahren gemeint, bei dem durch Verwendung von Minoren zweiter Ordnung aus drei linearen Gleichungen immer zwei Unbekannte auf einmal eliminiert werden[4]). Nehmen wir der Reihe nach Ketten von drei, vier, fünf und beliebig vielen Gleichungen vor.

A. Drei Gleichungen. Der Weg, den man am besten einschlägt, soll hier und späterhin immer sogleich an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden. Seien gegeben die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 3, \\ x + 2y + z &= 4, \\ 2x - y + 4z &= 2. \end{aligned}$$

Ausrechnung.

3. Schritt	2. Schritt	1. Schritt	Nr.	x	y	z	k
− 28/4	56/4	− 5	(1)	3	2	− 1	3
84/4	− 56/4	7	(2)	1	2	1	4
		4	(3)	2	− 1	4	2
			(1′)	28			7
			(2′)		28		42
− 4/4	4/4		(3′)			28	21

Ergebnis: $x = 0{,}25$; $y = 1{,}5$; $z = 0{,}75$.

[4]) Bei der Ermittlung des Ranges einer Matrix, beim Auswerten von Determinanten und ähnlichen Aufgaben kommt man mit beschleunigtem Eliminieren bedeutend schneller zum Ziel, als auf andere Weise, vergl. meine »Beiträge zur praktischen Analysis« I und II, Mathem. Ann. Bd. 99 (1928), S. 622 ff. und Bd. 103 (1930), S. 300 ff.

Erläuterung. Zuerst sind (1. Schritt) x und y aus allen drei Gleichungen auf einmal eliminiert worden durch Multiplikation der Gleichungen mit den Minoren 2. Ordnung, deren Elemente in den beiden ersten Spalten stehen, also

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

und nachherige Addition, was die Gl (3′) ergeben hat. Um die Gl. (1) und (2) »nachzuholen«, waren (1) und (2) vor ihrer Addition einmal (2. Schritt) mit den Minoren 2. Ordnung aus den zu den Gl (1), (2) und (3′) gehörigen Elementen der 2. und 3. Spalte, nämlich

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 28 \end{vmatrix} = 56, \quad \begin{vmatrix} 0 & 28 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -56, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

zu multiplizieren, und hierauf (3. Schritt) mit den zu denselben Gleichungen gehörigen Elementen der 3. und 1, Spalte, nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & 0 \end{vmatrix} = -28, \quad \begin{vmatrix} 28 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 84, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

aber wegen eines allgemeinen Satzes müssen diese Faktoren alle durch den Diagonalminor 2. Ordnung

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

teilbar sein, so daß bei (1′) und (2′) in der Diagonale sich dasselbe Element 28 wie bei (3′) einstellt. Deshalb sind jene Faktoren im voraus schon als Brüche mit dem Nenner 4 geschrieben worden.

B. Vier Gleichungen. Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + 5u &= 29, \\ 5x + 2y - 2z + 3u &= 15, \\ 3x - 4y + 7z - u &= 12, \\ 4x + 3y - 5z + 2u &= 3. \end{aligned}$$

Ausrechnung.

Faktoren					Nr.	x	y	z	u	k
		125/9	− 50/9	26	(1)	2	− 1	3	5	29
		− 50/9	− 25/9	− 5	(2)	5	2	− 2	3	15
				− 1	(3)	3	− 4	7	− 1	12
	119/25			− 4	(1′)	25			− 19	− 51
119/25				− 3	(2′)		25		209	886
		− 19/9	− 4/9	5	(3′)			25	124	571
				25	(4)	4	3	− 5	2	3
					(1″)	119				119
					(2″)		119			238
					(3″)			119		357
					(4″)				119	476

Ergebnis: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$.

Erläuterung. Durch beschleunigtes Eliminieren wurde aus (1), (2) und (3) unmittelbar (3′) sowie durch Nachholen von (1) und (2) vollends (1′) und (2′) erhalten. Von hier an kam das gewöhnliche Clasensche Verfahren zur Anwendung. Natürlich hätte man (4″) mit 119 kürzen können, um das Nachholen von (1′), (2′) und (3′) etwas zu vereinfachen.

C. Fünf und mehr Gleichungen. Hier kann man, von einigen andern Möglichkeiten abgesehen, so vorgehen: Bei n Gleichungen setzt man beschleunigtes Eliminieren so lange fort, bis nur eine der noch nicht verwendeten gegebenen Gleichungen übrig bleibt, und verfährt nun vollends nach Clasen.

7. Fall unverträglicher Gleichungen. Es genügt ein Beispiel mit drei Gleichungen. Nehmen wir das Folgende:

$$2x - y + z = -5,$$
$$x + 2y + 3z = 3,$$
$$4x + 3y + 7z = 8.$$

Wendet man beschleunigtes Eliminieren an, so ergibt sich schon beim ersten Schritt, wie die folgende Ausrechnung zeigt, die unmögliche Gleichung

$$0 \cdot z = 35,$$

die Gleichungen sind also unverträglich.

	Nr.	x	y	z	k
− 5	(1)	2	− 1	1	− 5
− 10	(2)	1	2	3	3
5	(3)	4	3	7	8
	(3_2)			0	35

8. Fall der Ueberbestimmtheit. Nehmen wir als Beispiel die vier Gleichungen

$$3x + 2y + z + 4u = 6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$
$$2x - y + 3z + 5u = 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$
$$4x + 2y - 3z + u = 7 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$
$$3x + y + 12z + 15u = 6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Wir fügen den Spalten für x, y, z, u, k je eine solche für die zu untersuchenden Gleichungen hinzu:

		Nr.	x	y	z	u	k	(1)	(2)	(3)	(4)
5	8	(1)	3	2	1	4	6	1			
3	2	(2)	2	− 1	3	5	2		1		
	− 7	(3)	4	2	− 3	1	7			1	
− 7		(4)	3	1	12	15	6				1
	2	(3′)			35	35	3	8	2	− 7	
	1	(4′)			− 70	− 70	− 6	5	3		− 7
					0	0	0	21	7	− 14	− 7

Beschleunigtes Eliminieren, auf (1), (2) und (3) sowie auf (1), (2) und (4) angewendet, hat als neue Gleichungen (3′) und (4′) geliefert, an denen man die Beziehung

$$2 \cdot (3') + (4') = 0$$

bemerkt. Die vier gegebenen Gleichungen sind also linear abhängig — die Gl. (1), (2), (3) wie auch (1), (2) (4) waren es noch nicht, weil sonst (3′) und (4′) hätten identisch Null sein müssen — und zwar ergeben die in den letzten vier Spalten der letzten Zeile stehenden Elemente nach Kürzen mit dem unwesentlichen Faktor 7:

$$3 \cdot (1) + (2) - 2 \cdot (3) - (4) = 0.$$

Die Auflösung der Gl. (1), (2) und (3) könnte nach Nr. 6A geschehen, wodurch man x, y und z als lineare Funktionen der unbestimmt bleibenden Größe u erhielte.

Schlußbemerkung. Man könnte Clasens Verfahren auch dahin verallgemeinern, daß man bei jedem Gang zu den schon umgeformten Gleichungen immer zwei oder mehr weitere der gegebenen Gleichungen (statt nur einer) hinzunähme, bei der Durchführung wären aber dann Minoren dritter und höherer Ordnung auszurechnen, weshalb ein solches Vorgehen keinesfalls empfohlen werden soll.

Für die bei Clasens Verfahren möglichen Proben haben Clasen selbst und Mansion[1]) Beweise gegeben, weshalb davon abgesehen werden kann, hier neue Beweise mitzuteilen, um so mehr, als für die ganz ähnlichen Proben, die bei dem (zur Bestimmung des Ranges einer Matrix und zum Auswerten von Determinanten genügenden) gewöhnlichen und beschleunigten Eliminieren ohne die Clasensche Anordnung, überhaupt ohne das Nachholen von Gleichungen, gemacht werden können, in meinem »Beitrag zur praktischen Analysis, II«[4]) sich Beweise finden. 65

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit.

Das Problem **der Torsion der homogen-isotropen Prismen** wird mit funktionentheoretischen Methoden von Muschelisvili behandelt (Bulletin de l'Institut Polytechnic Lénine a Tiflis 1929, I, 1). Ist $F(z)$ die »komplexe Torsionsfunktion« und $z = \omega(\zeta)$, die den Bereich S auf den Einheitskreis $|\zeta| \leqq 1$ abbildet, und wird $F[z] = F[\omega(\zeta)] = f(\zeta)$ bezeichnet, dann läßt sich auf Grund eines Satzes von H. A. Schwarz zeigen, daß

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega(\sigma)\, \overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

wobei γ den Umriß des Kreises und σ einen Punkt desselben bedeutet; $\overline{\omega}$ ist die konjugierte Funktion von ω. Sobald somit die Abbildungsfunktion ω bekannt ist, kann die Funktion f, die das Torsionsfeld charakterisiert, durch obiges Linienintegral dargestellt werden. Wenn man bestimmte einfache Typen der Abbildungsfunktion ω betrachtet, kann man zu einer Familie von Querschnitten gelangen, für die f in geschlossener Form dargestellt werden kann. Auf diesem semiinversen Weg löst Muschelisvili u. a. das Torsionsproblem für epitrochoidale Querschnitte und für die Hälfte der Bernoullischen Lemniscate.

Huber faßt in einer umfangreichen **Abhandlung über „Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten"** seine auf diesen Fragenkomplex bezüglichen grundlegenden Untersuchungen, die er im Laufe der letzten 16 Jahre in deutscher, französischer und polnischen Sprache veröffentlicht hat, systematisch zusammen. Die Schrift ist aus den vom Verfasser an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich im Februar 1929 gehaltenen Gastvorlesungen hervorgegangen und als Abhandlung der Warschauer Akademie für technische Wissenschaften erschienen. In der hier vorliegenden Fassung der Huberschen Arbeit ist besonders die klare, ausführliche Darlegung der grundlegenden Ansätze der Theorie, sowie des Weges zur Anwendung auf Eisenbeton und Wellblech (Wahl der elastischen Konstanten) zu begrüßen. Sehr wertvoll sind auch die Betrachtungen über den Vergleich der Theorie mit den Versuchsresultaten. — Trotz aller Klarheit der Darstellung und der Mannigfaltigkeit der näher ausgearbeiteten Sonderfälle — durchweg rechteckige Platten mit verschiedenster Stützung und Belastung — scheint die Theorie für die unmittelbare Anwendung in der Praxis keineswegs reif, kann es vielleicht im Hinblick auf die in der Theorie steckenden mathematischen und rechnerischen Schwierigkeiten auch nie werden. Es wäre aber sehr wohl möglich und wünschenswert, daß die Resultate von Huber — falls sie noch zahlenmäßig ausgewertet und auf ihre praktischen Endresultate hin studiert würden, ähnlich wie einige Marcussche Resultate durch Klagas ausgewertet wurden — die zukünftigen Eisenbetonbestimmungen und so mittelbar auch die Baupraxis günstig beeinflussen könnten.

Das **über unendlich vielen gleichen Feldern durchlaufende, zur Hälfte mit Wasser gefüllte Rohr** wird in einer umfangreichen Abhandlung von A. F. Samioe (Ingenieurs

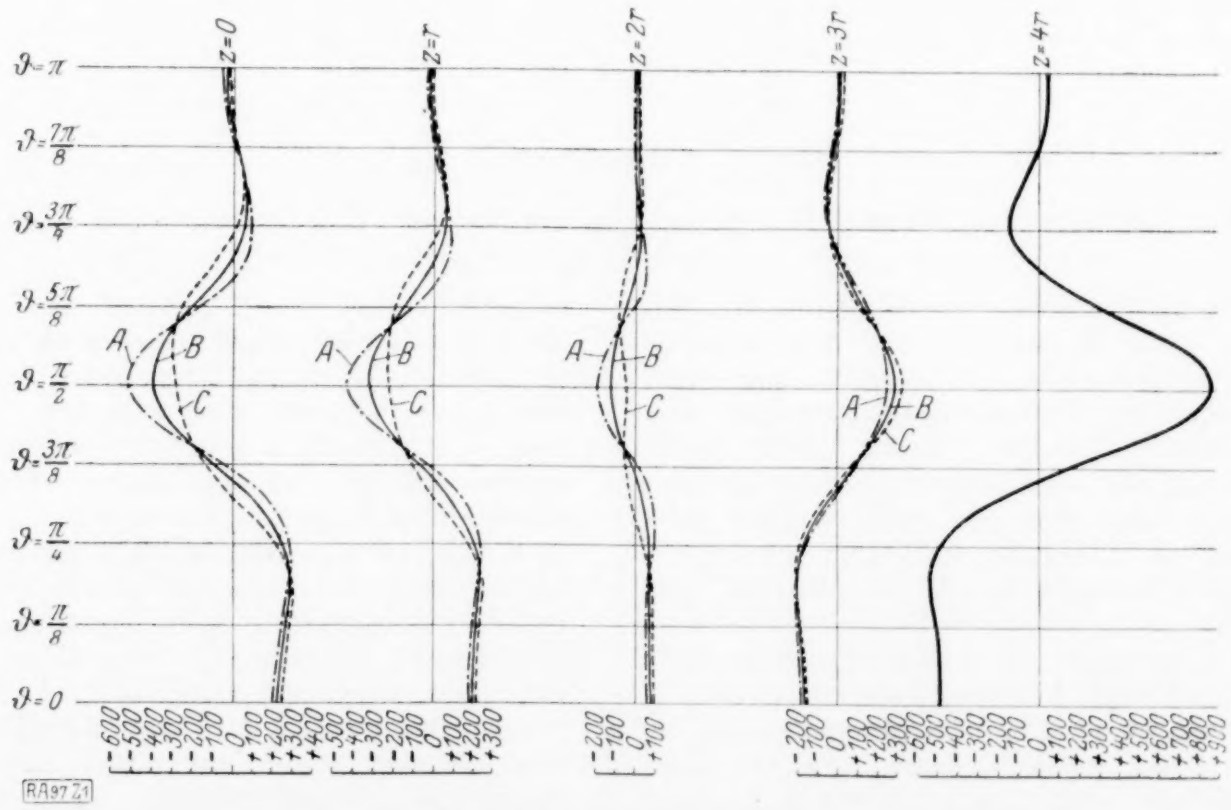


Abb. a. Längsspannung σ_z.

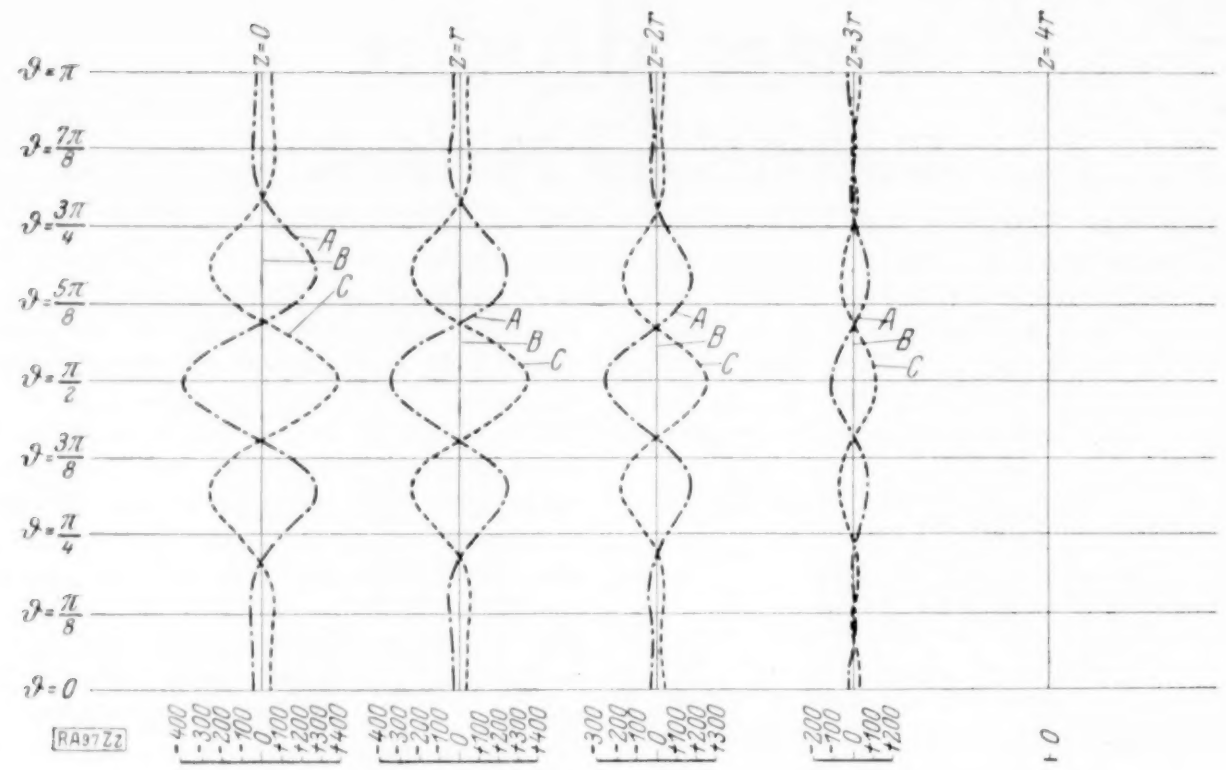


Abb. b. Tangentialdruck- (zug-) spannung σ_ϑ.

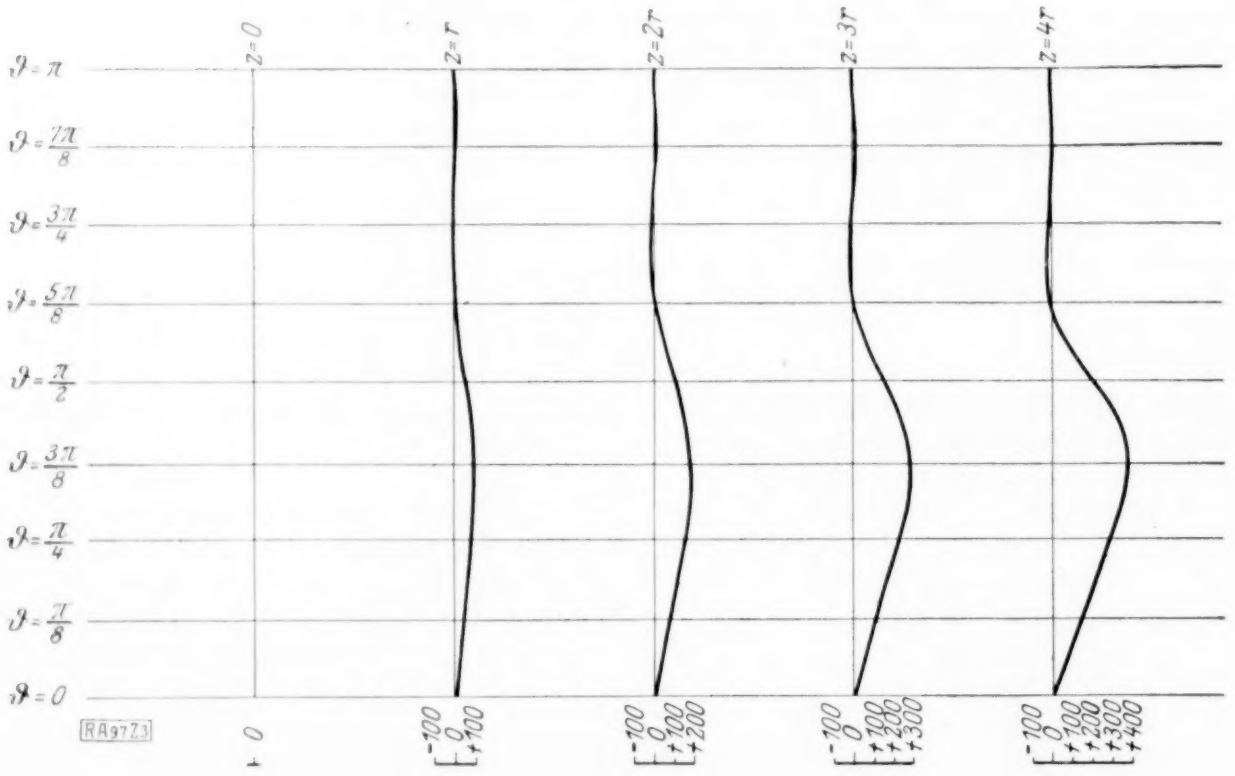


Abb. c. Schubspannung $\tau_{z\vartheta}$.

A = Außenseite des Rohres; B = Mittelfläche des Rohres; C = Innenseite des Rohres.

Vetenskaps Akademiens Handlingar, Nr. 50, Stockholm 1926) behandelt. Auf dem Umweg durch Formänderungsarbeitsbetrachtungen werden die exakten Differentialgleichungen des Problems aufgestellt. Die Lösung wurde durch Reihenentwicklung (Trigonometrische Reihen) durchgeführt und zwar in zwei Teilen: eine Hauptlösung und eine Zusatzlösung. In nebenstehenden Abbildungen ist die Hauptlösung (die für die Bemessung allein in Frage kommt und auch den Charakter der Gesamtlösung gibt) für den Sonderfall $l = 4\,D = 4000\,d$ (wobei l die Stützweite, D der Rohrdurchmesser, d die Wandstärke) wiedergegeben. Es ist hieraus ersichtlich, daß die Navier-Saint Venantsche Biegungstheorie für den vorliegenden Fall nicht einmal als grobe Annäherung gelten kann; bemerkenswerterweise ist auch die Verteilung der Spannung in der Längsrichtung eine gänzlich andere, als man nach den älteren Biegungstheorien erwarten würde. Leider hat der Verfasser seine Resultate mit dem Näherungsansatz von Karl J. Karlsson (Schweizerische Bauzeitung 1922) nicht verglichen, so daß seine Resultate auf andere Füllungsgrade keine wesentlichen Schlußfolgerungen zulassen. — An dieser Stelle sei nebenher auch an frühere, auf Holzrohrleitungen bezügliche Aufsätze desselben Verfassers erinnert, die nicht allein für den Praktiker dieses Sondergebietes auch noch heute wichtig sein dürften, sondern auch für den

Festigkeitsfachmann manche Anregungen geben können: »Om Trätuber« (Teknisk Tidskrift Väg och Vattenbeggnadskonst 1916, Heft 9) und »Tubledning av trä vid Lindesnäs Vattenkraftverk« (Teknisk Tidskrift 1922, Heft 10).

In einem ganz anders liegenden Falle: nämlich bei der **Biegungsbeanspruchung dünnwandiger Dampfrohrleitungen mit gekrümmter Achse** (federnde Ausgleichsrohre usw.) ist die Unbrauchbarkeit der Navierschen Hypothese bekanntlich schon im Jahre 1911 von v. Kármán nachgewiesen worden. Dieses Problem ist neuerdings von W. Hovgaard aufgegriffen und in drei interessanten Abhandlungen behandelt worden (Massachusetts Institut of Technology, Vol. 62, Nr. 64, 1926 und Vol. 64 Nr. 39, 1928). Die erste Abhandlung ist eine experimentelle Bestätigung der Kármánschen Theorie auf ziemlich breiter Grundlage. Die zweite Arbeit »Deformation of Plane Pipe« ist der Theorie gewidmet und zeigt die Wege, auf welchen die Kármánschen Zusammenhänge für dünnwandige Rohre mit ganz beliebig geformter ebener Achse angewandt werden können. Die dritte Abhandlung »Further research on pipe bends« bringt wesentlich Neues: hier wird nämlich das Verhalten dünnwandiger gekrümmter Rohre nach Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze studiert und die gemessene Spannungsverteilung mit der auf rein elastischer Grundlage errechneten verglichen; das Studium wurde ergänzt durch die Beobachtung der Lüderschen Fließlinien.

Berlin. P. Neményi. 97

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur graphischen Darstellung der Beziehungen an elastisch eingespannten Balken. (Aus dem Institut für technische Strömungsforschung, Technische Hochschule, Berlin.) Im Anschluß an die schönen Bemerkungen von Herrn Emil Müller[1]) soll im folgenden gezeigt werden, daß die von ihm eingeführte Polaren-Darstellung der Verhältnisse am teilweise eingespannten Balken bei der Betrachtung eines wandernden eingeprägten Momentes bzw. noch höherer wandernder Singularitäten auf ganz anders geartete geometrische Orte führt, als die von Emil Müller allein betrachtete wandernde Einzellast,

[1]) Diese Zeitschr., August 1929, S. 270 ff

	$x(t)$	$y(t)$	$f(x, y) = 0$
I	$t(1-t)(2-t)$	$t(1-t^2)$	$(x+y)^3 - 3(2x-y)(2y-x) = 0$
II	$2 - 6t + 3t^2$	$1 - 3t^2$	$(x+y)^2 + 6(y-x) - 3 = 0$
III	$-6 + 6t$	$-6t$	$x + y + 6 = 0$
IV	$+6$	-6	

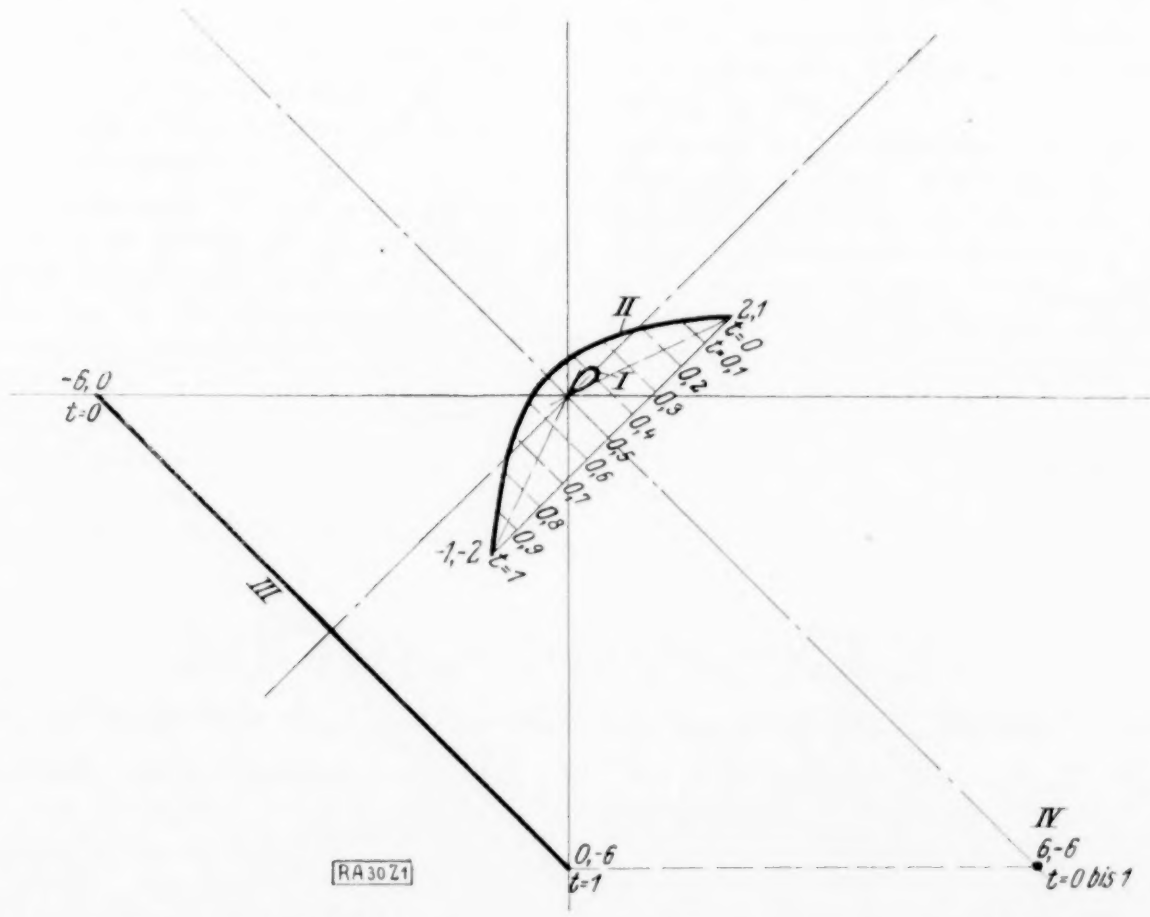


Abb. 1. Polarendarstellung der Tangentendrehwinkel des frei aufliegenden Balkens.

und daß diese verschiedenen Kurven miteinander in einer einfachen Beziehung stehen.

Zu diesem Zwecke deuten wir zunächst die von Müller eingeführte Polaren oder, wie er sie nennt, »Schleifen« kinematisch. Dies ist ohne weiteres möglich, falls man nur die Abszisse der wandernden Last ξ als Zeitkoordinate t deutet. Dann kann man auch die sukzessiven Hodographen dieser Kurven einführen, und es stellt sich heraus, daß dieselben je um einen Grad niedrigere Kurven sind. Nachfolgend wird für den beiderseits frei gelagerten Balken die erste »Hauptschleife« und deren sukzessive Hodographen in einer Tabelle zusammengestellt und graphisch veranschaulicht. Ganz ähnlich läßt sich aus der zweiten »Hauptschleife« durch Hodographenbildung eine andere Parabel, Geradenabschnitt und ein Punkt ableiten, die in Abb. 2 mitgeteilt sind.

Diese Hodographenkurven stellen nun die Polaren der Tangentenneigung bzw. der Einspannmomente für das wandernde Einzelmoment, sowie für die höheren Singularitäten[2]) »Doppelmoment« und »Doppelangriff« dar. Um dies einzusehen, genügt es, zu überlegen, daß das Superpositionsgesetz für alle elastischen

[2]) **Nemény i: Ueber eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie. Diese Zeitschr., Dezember 1929, S. 488 ff.**

	$x(t)$	$y(t)$	$f(x, y) = 0$
I	$-t(1-t)^2$	$-t^2(1-t)$	$(x+y)^3 + xy = 0$
II	$-3t^2+4t-1$	$3t^2-2t$	$^3/_4(x+y)^2 + ^1/_2(x-y) - ^1/_4 = 0$
III	$-6t+4$	$6t-2$	$x+y-2=0$
IV	-6	$+6$	

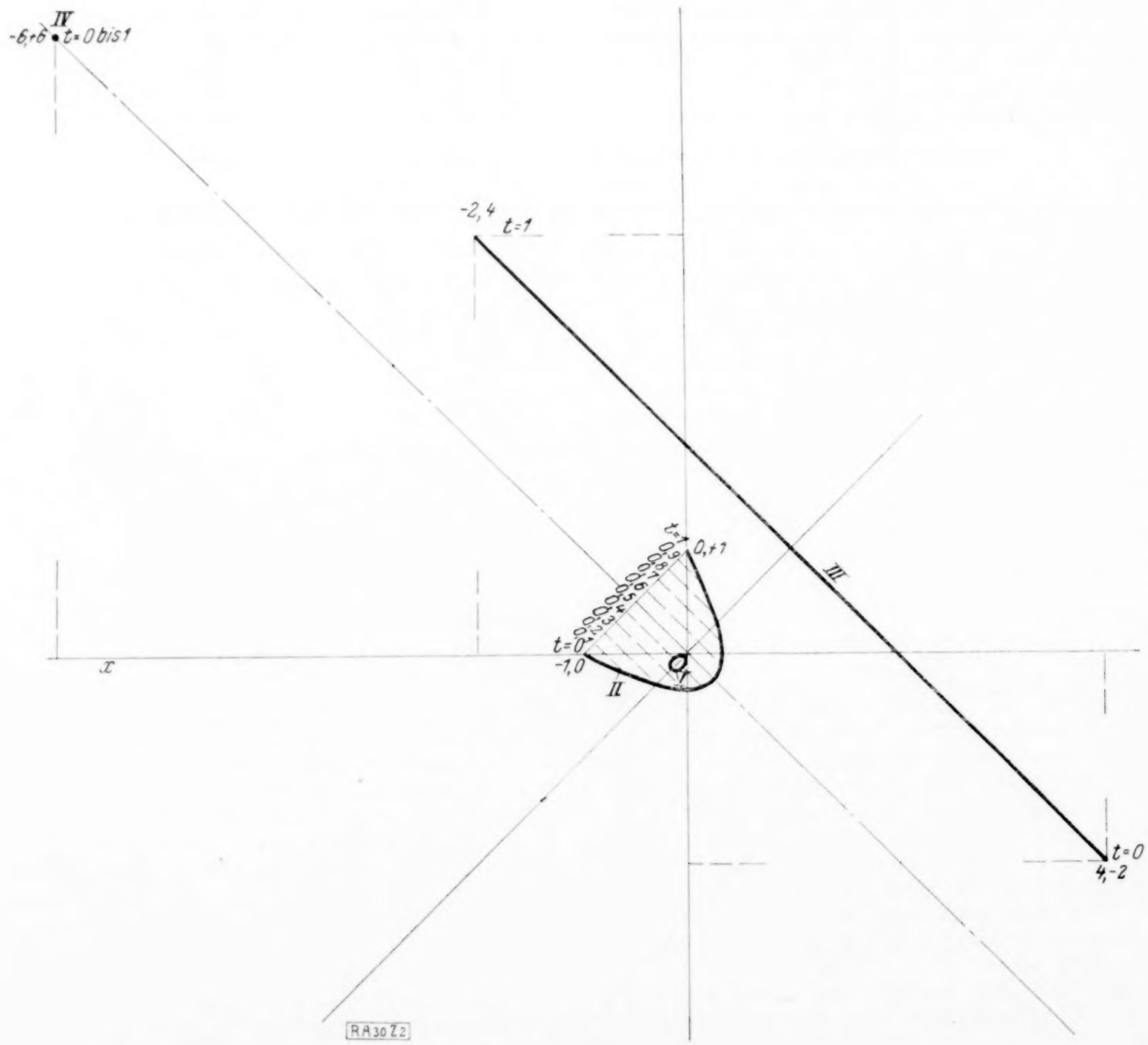


Abb. 2. Polarendarstellung der Einspannmomente des beiderseits voll eingespannten Balkens.

Wirkungen gilt, also nicht nur für die Durchbiegung, sondern auch für Tangentenwinkel und Einspannmoment. Demzufolge[3]) kann man die Tangentenwinkel bzw. Einspannmomente für die höheren Singularitäten aus deren Wert für eine wandernde Einzellast durch ein-, zwei- bzw. dreimalige Differentiation nach der Laststellung ξ bzw. t ermitteln.

Die affine Transformation, die diese Gebilde in die entsprechenden Gebilde für teilweise Einspannung überführt, ist naturgemäß identisch mit der von Emil Müller für die erste bzw. zweite Hauptschleife benützten Transformationen. Daher ist die Polare für die Einzelmomente, Doppelmomente und Doppelangriffe auch bei teilweiser Einspannung ein Parabelabschnitt, ein Geradenstück bzw. ein Punkt. Man kann somit alle Aufgaben für diese Singularitäten ebenso behandeln, wie es für Einzellasten von Herrn Müller gezeigt wurde. Da nun die Biegelinien für die höheren Singularitäten zugleich Einflußlinien für Tangentenneigung, Biegemoment bzw. Querkraft darstellen, so läßt sich mit Hilfe dieser neuen Erkenntnisse eine außerordentlich scharfe schnelle Prüfung der Einflußlinien dieser Größen durchführen.

Berlin. P. Neményi. 30

Kontrollformel für die Mittelwerte einer Folge von Funktionswerten. Der Aufstellung nachstehender Kontrollformel lag ein Bedürfnis zugrunde. Will man eine für gleiche Abstände des Argumentes $a + \lambda w$ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots n$) tabulierte Funktion für die mittleren Argumente ($\lambda = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots (2n-1)/2$) interpolieren, so ist hierzu zunächst die Bildung der arithmetischen Mittel aus je zwei aufeinanderfolgenden Funktionswerten erforderlich. Es lag mir daran, hierüber eine Kontrollmöglichkeit zu besitzen, wie man sie z. B. für die Differenzenbildung hat durch die Beziehung: Die Summe einer Spalte des Differenzenschemas ist gleich der Differenz des letzten und ersten Gliedes der vorhergehenden Spalte.

Setzt man den Abstand w je zweier Argumentwerte gleich 1, so ist die Folge der $n+1$ gegebenen Funktionswerte mit ihren ersten Differenzen, deren Anzahl n beträgt, nach der Gauß-Enkeschen Schreibweise folgendermaßen darstellbar:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{f}(a) & \\
\dfrac{f(a)+f(a+1)}{2} = f(a) + \dfrac{1}{2} f^{I}\left(a+\dfrac{1}{2}\right) & \mathrm{f}^{I}(a+{}^1/_2) \\
\mathrm{f}(a+1) = \mathrm{f}(a) + \mathrm{f}^{I}(a+{}^1/_2) & \\
\dfrac{f(a+1)+f(a+2)}{2} = f(a) + f^{I}\left(a+\dfrac{1}{2}\right) & \\
\qquad + \dfrac{1}{2} f^{I}\left(a+\dfrac{3}{2}\right) & \mathrm{f}^{I}(a+{}^3/_2) \\
\mathrm{f}(a+2) = \mathrm{f}(a) + \mathrm{f}^{I}(a+{}^1/_2) + \mathrm{f}^{I}(a+{}^3/_2) & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\mathrm{f}(a+n) = \mathrm{f}(a) + \mathrm{f}^{I}(a+{}^1/_2) + \ldots + \mathrm{f}^{I}[a+(2n-1)/2]. &
\end{array}
$$

Die gesuchten Mittelwerte zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Funktionswerten sind durch Kursivdruck gekennzeichnet. Bildet man die Summe aus ihnen:

$$
\begin{aligned}
& n f(a) + (n-{}^1/_2) f^{I}(a+{}^1/_2) + (n-{}^3/_2) f^{I}(a+{}^3/_2) \\
& \qquad + \ldots + \left(n - \frac{2n-1}{2}\right) f^{I}\left(a + \frac{2n-1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

so ergibt sich für die Mittelwerte eine verhältnismäßig einfache Kontrollformel in dem Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{f(a+\nu-1)+f(a+\nu)}{2} &= n f(a+n) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} (2\nu-1) f^{I}\left(a + \frac{2\nu-1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Die Anwendungsmöglichkeit dieser Formel erstreckt sich natürlich auch auf die Mittelwerte einer jeden Spalte des Differenzenschemas. Demnach läßt sich die Kontrollformel in folgende Worte fassen:

In einem Differenzenschema[1]) ist die Summe der n Mittelwerte zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern einer Spalte gleich dem n fachen Betrage des letzten Gliedes der Spalte, vermindert um die halbe Summe der νten ungeraden Vielfachen der Glieder der folgenden Spalte.

Da bei langen Spalten die ungeraden Zahlen sehr groß werden, wird man jene zweckmäßig in kürzere Bereiche einteilen. Sodann empfiehlt es sich, die Formel in derjenigen Richtung einer Spalte zu gebrauchen, in der die Glieder der folgenden Spalte abnehmen, deren Vorzeichen bei der Richtung von unten nach oben umzukehren sind.

Jena, Institut für angewandte Mathematik.

Helmut Werner. 52

[3]) Vergl. meine ausführliche Darstellung der neuen Singularitätenmethode in meiner Arbeit »Ueber die Singularitäten der Elastizitätstheorie«. Diese Zeitschrift, August 1930, S. 383 ff.

[1]) Die Formel gilt auch für Funktionsreihen mit ungleichen Argumentsintervallen.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr. G. **WIARDA,** a. o. Professor an der Techn. Hochschule Dresden. Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Mit 8 Fig. im Text. Samml. Mathem.-Physik. Lehrbücher, Nr. 25. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930. 183 S. Preis geb. 9,60 M.

Es fehlte bisher an einer Einführung in die Theorie der Integralgleichungen, die in erster Linie die Aufgabenstellung der Mechanik und der Technik im Auge hatte. Ein derartiges Buch hat mit mancherlei Geschick der Verf. geschaffen. Er geht von anschaulichen, physikalisch-technischen Fragestellungen aus und

bringt eine Darstellung der klassischen Theorien von Fredholm, Hilbert und E. Schmidt. Dem Ziel des Buches wäre es nützlich gewesen, die Ausführung des Textes durch etwas mehr Abbildungen zu unterstützen. Mises. 110

D. **THOMA,** Dr.-Ing., o. Professor. Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. Heft 3 mit 233 Abb. Verlag Oldenbourg, München und Berlin 1929. 163 S. Preis geh. 12 M.

W. **SPANNHAKE,** o. Professor. Mitteilungen des Instituts für Strömungsmaschinen der Techn. Hochschule Karlsruhe. Heft 1 mit 74 Abb. im Text und 13 Bildtafeln. Verlag R. Oldenbourg München und Berlin 1930. V + 84 S. Preis geh. 8 M.

Das dritte Heft der Münchener Mitteilungen umfaßt eine Reihe von wertvollen Berichten über Versuchsreihen, die sich den traditionellen Aufgabenstellungen der Hydraulik einfügen: Energieverlust in Rohrkrümmern, in Kniestücken, Rohrverzweigungen und dergl. Auch Untersuchungen an einem neuen Apparat zur Prüfung der Zähigkeit, bzw. der Schmierfähigkeit von Oelen werden beschrieben.

In gleicher äußerer Form und im gleichen Verlage läßt jetzt auch das Karlsruher Institut eigene Mitteilungen erscheinen. Das erste Heft bringt eine Beschreibung des Laboratoriums, theoretische Aufsätze des Herausgebers W. Spannhake und seines Mitarbeiters W. Barth über Kreiselrad-Theorie sowie einen Versuchsbericht über Kräftemessung an einem zylindrischen Gitter. Mises. 110

R. **HERMANN** und TH. **BURBACH,** Strömungswiderstand und Wärmeübergang in Rohren. Mit einem einführenden Vorwort von L. Schiller, Prof. a. d. Universität Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930. IV + 88 S. Preis 7,80 M.

Der erste der beiden in diesem Büchlein zusammengestellten Versuchsberichte aus dem Leipziger, unter Leitung von L. Schiller stehenden Institut betrifft Messung des Strömungswiderstandes in kreiszylindrischen Rohren bei Reynoldsschen Zahlen bis etwa eine Million. Die Ergebnisse fügen sich glatt in den Rahmen des bisher Bekannten. Der zweite Aufsatz berichtet nach einer theoretischen Einleitung über Versuche zur Bestimmung der Wärmeübergangszahl von Rohren, namentlich unter Berücksichtigung der Anlaufstrecke. Der Verf. gelangt zur Aufstellung von Faustformeln und von Zahlenangaben, die für die Praxis von Nutzen sein können.

Mises. 110

Dr. H. C. **PLAUT,** Fabrikationskontrolle auf Grund statistischer Methoden. Vorträge gehalten am Außeninstitut der Technischen Hochschule Charlottenburg im Winter-Semester 1928/29. Mit 63 Abb. und 9 Zahlentafeln. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1930. V + 81 S.

Daß allmählich die Methoden der mathematischen Statistik in der Fabrikationstechnik Eingang finden, konnte hier schon an manchen literarischen Erscheinungen festgestellt werden. Das vorliegende Heft ist eine Zusammenstellung verschiedener, z. T. schon früher veröffentlichter Aufsätze, die sich die Aufgabe stellen, den Praktiker mit dem Gebiet der statistischen Betrachtungsweise vertraut zu machen. Es liegt in der Natur der Sache, daß gegenüber dem heutigen Stand der Statistik in ihrer Anwendung auf anderen Gebieten kaum etwas Neues geboten wird. Gleichwohl wird das Buch für den Kreis, für den es bestimmt ist, wertvoll sein. Mises. 110

Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München. Dritte Folge, herausgegeben von LUDWIG FÖPPL. Der ganzen Reihe 34. Heft. Mit 10 Tafeln in Steindruck und 2 Autotypietafeln. Verlag Theodor Ackermann, München 1930. IV + 40 S. Preis 13,50 M.

Mit dem vorliegenden Heft setzt Ludwig Föppl eine durch die Zeitverhältnisse unterbrochene Veröffentlichungsreihe fort, die auf eine große Vergangenheit zurückblicken kann. Das Heft enthält u. a. einen theoretischen Aufsatz des Herausgebers über singuläre Punkte des ebenen Spannungszustandes[1]) und einen Bericht über sehr schöne polarisationsoptische Spannungsmessungen. Mises. 110

Prof. Dr. F. **AUERBACH** und Prof. Dr. W. **HORT.** Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Band I: Technische und physikalische Mechanik starrer Systeme. Erster Teil, Lieferung 3. Mit 100 Abb. im Text. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1929. S. 695—786. Preis brosch. 12,50 M.

Die vorliegende Lieferung, mit der der erste Teilband des umfangreichen Handbuchs zum Abschluß kommt, enthält drei kurze Referate von Wilhelm Hort und Paul Stephan über Statik der Hebezeuge, über Reibung und über Seilsteifigkeit. Es werden die elementaren rechnerischen Beziehungen zwischen den Kraft- und Arbeitsgrößen usw. ausführlich wiedergegeben. Die rein experimentellen Angaben treten dagegen ein wenig zurück.

Mises. 110

Dr. ROLAND **WEITZENBÖCK,** Professor an der Universität Amsterdam. Der vierdimensionale Raum. Mit 52 Abb. Die Wissenschaft, Bd. 80. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1929. VIII + 142 S. Preis 9 M, geb. 10,50 M.

Prof. Dr. LUDWIG **ECKHART,** Privatdozent an der Techn. Hochschule Wien. Der

[1]) Vergl. diese Zeitschr. Bd. 9 (1929), S. 480—481.

vierdimensionale Raum. Mit 29 Textfiguren. Mathem.-Physikal. Bibliothek Nr. 84. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. 54 S. Preis kart. 1,20 M.

Das anregend geschriebene Buch von Weitzenböck bringt eine ernsthafte Einführung in die Begriffszusammenhänge, die für den Mathematiker mit dem Ausdruck »mehrdimensionaler Raum« verknüpft sind. Außerdem enthält es auch recht amüsante Ausführungen über das »Feenreich der Geometer« und einige Mitteilungen aus der »Phantastischen Literatur« über den vierdimensionalen Raum.

Im bescheidenen Umfang von etwa 50 kleinen Seiten gibt L. Eckhart eine leicht verständliche Einführung in die geometrische Theorie mehrdimensionaler Räume, wie sie etwa im Anschluß an den höheren Schulunterricht Interesse finden kann. Mises. 110

Handbuch der Physik. Springer, Berlin 1928/29. Band IV: Allgemeine Grundlagen der Physik. Redig. von H. Thirring. Mit 98 Abb. und einer Tafel. X + 667 S. Preis 60 M, geb. 62,80 M. — Band XX: Licht als Wellenbewegung. Redig. von H. Konen. Mit 225 Abb. XIV + 967 S. Preis 86 M, geb. 89 M. — Band XXI: Licht und Materie. Redig. von H. Konen. Mit 386 Abb. XII + 968 S. Preis 93 M, geb. 96 M.

Das großangelegte Springersche »Handbuch der Physik«, das zum erstenmal hier 1927[1]) angezeigt wurde, ist überraschend schnell, vor etwa einem Jahre zum Abschluß gelangt. Wenn hier noch der letzterschienenen Bände Erwähnung geschehen soll, so mag dies auch den Anlaß bieten, auf das Gesamtunternehmen einen kurzen Rückblick zu werfen. Zweifellos haben die Referate nicht alles gebracht, was man gehofft oder gewünscht hätte. Auf manchen Gebieten war der Sache nach eine Zusammenfassung, die ein einigermaßen geschlossenes Bild liefert, wohl nur schwer möglich, auf anderen ist vielleicht nicht immer der beste Referent gefunden oder von dem Referenten nicht immer die erforderliche Sorgfalt angewandt worden. Vergleicht man aber das Gesamtwerk mit anderen ähnlichen Unternehmungen, so muß man ihm gewiß eine gewaltige Ueberlegenheit zubilligen. Es ist innerhalb einer angemessenen Frist zum Abschluß gekommen, ohne daß ein gewaltsames Abbrechen durch Weglassen organisch wichtiger Teile oder eine Inhomogenität durch Aufnahme von Lückenbüßern eingetreten wäre. Auch der sonst unvermeidliche Nachteil allzugroßer Ausdehnung der Erscheinungsdauer, daß der ersterschienene Band einem anderen Standpunkt entspricht als der letzte, ist fast vollständig vermieden. So liegt schließlich im Ganzen gesehen ein Werk vor, das nicht nur ein würdiger Ausdruck der deutschen wissenschaftlichen Arbeit ist, sondern darüber hinaus ein für lange Zeit kennzeichnendes Denkmal des gegenwärtigen Standes der Physik bilden wird.

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 81 — 83.

Von den letzterschienenen Bänden mag Band IV, der die allgemeinen Grundlagen der Physik behandelt, besonderes Interesse erwecken. Hier lag für die Herausgeber eine besonders schwer zu lösende Aufgabe vor, da schon die Gliederung dieses Stoffes nicht ganz einfach durchzuführen ist. In dem einleitenden Abschnitt über Ziele und Wege der physikalischen Erkenntnis sucht H. Reichenbach zwischen den verschiedenen, in der heutigen Physik herrschenden Ansichten zu lavieren, ohne klare Stellungnahme zu finden und ohne wirklich aufklärend zu wirken. Das Kapitel von Fürth über Statistik bringt eine große Menge von Material zur Darstellung. Am engsten an den Stil eigentlich physikalischer Referate schließen sich die Kapitel von Thirring über die Grundgesetze der Feldphysik und die vortrefflichen Ausführungen von Beck über allgemeine Relativitätstheorie an. Die Besprechung der neueren Entwicklung der Quantenphysik durch E. Guth dringt bis zu den neuesten Ergebnissen vor und bildet so eine willkommene Ergänzung zu den Referaten der früher erschienenen Bände, die trotz aller Kürze der Zeit nicht ganz von dem Schicksal des Veraltens bewahrt bleiben konnten. Das Schlußkapitel von Bernheimer über den Bau des Kosmos fällt wohl etwas aus dem Rahmen des Bandes heraus, wird aber sicherlich jedem physikalisch Interessierten willkommen erscheinen.

Die Bände XX und XXI, die zu den umfangreichsten der ganzen Serie gehören, geben in ausführlicher Weise in einer großen Zahl von Referaten einen Ueberblick über die gesamte Optik sowohl in ihren klassischen Teilen wie ihrer modernen Entwicklung. Mises. 110

Luftfahrtforschung. Berichte der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V. Berlin-Adlershof (DVL), der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (AVA), des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Aachen (AIA) und anderer Stätten der Luftfahrtforschung. Gesammelt als Beihefte zur Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt (ZFM) von der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL). 7. Band, Heft 1—3. Preis: Heft 1 15 M, Heft 2 13,20 M, Heft 3 3,30 M. — 8. Band, Heft 1—4. Preis: Heft 2 6,60, Heft 3 4,20, Heft 4 6,20 M. Verlag R. Oldenbourg, München 1930.

Die unter dem gemeinsamen Namen »Luftfahrtforschung« erscheinenden wissenschaftlichen Berichte der Versuchsanstalten in Berlin-Adlershof, Göttingen und Aachen sind hier zum erstenmal 1928[1]) angezeigt worden. Aus den letzten beiden Bänden sei hervorgehoben eine theoretische Arbeit von Liebers über die Resonanzschwingungen von Luftschrauben. Hier wird der Versuch gemacht, auf rechnerischem Wege die Schwingungsfrequenzen zu bestimmen, die für den Betrieb der Luftschrauben gefährlich werden können. Es zeigt sich

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 243 — 244.

vor allem, daß der Einfluß der Luftkräfte auf die Frequenzen sehr gering ist und daß im allgemeinen nicht Torsions- sondern Biegungsschwingungen maßgebend werden.

Das neueste Heft 4 des 8. Bandes enthält die schon lang erwartete zusammenfassende Uebersicht über die in Adlershof vorgenommene Untersuchung der Kurbelwellenbrüche, die seit mehreren Jahren eine ständige Gefahrenquelle für den Luftverkehr bilden. Das Ergebnis kann mit wenigen Worten dahin ausgesprochen werden, daß die Kurbelwellen der in Frage kommenden Motoren zu schwach dimensioniert sind. Mises. 110

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Professor an der Universität Berlin, Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Analytische Geometrie. Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 29. Mit 39 Figuren im Text. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930. IV + 120 S. Preis kart. 6,60 M.

»Der vorliegende Band will zusammen mit zwei anderen: Projektive Geometrie und Einleitung in die höhere Geometrie die Theorie der linearen und quadratischen Gebilde in Ebene und Raum behandeln.« »Der vorliegende Band stellt die Vektorrechnung, später den Matrizenkalkül an die Spitze.« »Die Begriffsbildungen ..... von Vektoranalysis z. B. und Matrizenkalkül erscheinen so vorbildlich den geometrischen Objekten und der Anschauung angepaßt, daß ich es für eine Versündigung am geometrischen Geist hielte, sie deshalb zu meiden, weil sich einige an die knappe, bei diesen Begriffsbildungen übliche und mögliche Schreibweise nicht gewöhnen mögen.« »Die Begriffe, wie Vektor, Matrix, Gruppe, linearer Raum, Kalkül, die hier ihren Nutzen in lebendiger Fühlung mit der Anschauung am einfachsten Objekt bewähren, beeinflussen heute über das rein Mathematische hinaus die Wissenschaft. So scheint es angebracht, die Studierenden von vornherein an diese Dinge und an diese Denkweisen zu gewöhnen, ganz abgesehen davon, daß auch z. B. die Physik und auch die Technik an solcher Behandlung ein Interesse haben.«

Es handelt sich also um eine Einführung in die analytische Geometrie, die auch bei den angewandten Mathematikern besonderes Interesse beanspruchen darf. Der Stoff gliedert sich in 19 Paragraphen, von denen die fünf ersten die elementaren Begriffe bis zu dem inneren Produkt bringen. Der schwerwiegende § 6 handelt von Inhalt und Volumen und beweist auf Grund weniger anschaulicher Axiome zuerst die eindeutige Bestimmtheit, dann die Existenz und Identität mit der Determinante, deren Theorie mitentwickelt und nicht vorausgesetzt wird. § 8 handelt vom Vektorprodukt, § 11 vom Matrizenkalkül (man nennt ihn auch Tensorrechnung oder Dyadenrechnung, was leider im Buch nicht gesagt wird). Den Schluß des Buches bildet die Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades.

Referent zweifelt nicht, daß dieses kleine Buch, das alles Wesentliche für den Anfänger bringt, das den n-dimensionalen Raum zwar nicht scheut, aber doch nicht vergißt, daß wir im dreidimensionalen leben, bei reinen und angewandten Mathematikern Beifall finden wird.

Berlin. G. Hamel. 116

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. RUDOLF **KIRCHHOFF**[1]), Regierungsbaumeister. Die Statik der Bauwerke. Zweiter Band: Formänderungen statisch bestimmter ebener Fachwerk- und Vollwandträger — Allgemeine Theorie der statisch unbestimmten Fachwerk- und Vollwandträger. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 261 zum Teil farbigen Textabbildungen. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. IX + 368 S. Preis geh. 25 M, geb. 27 M.

G. **MAHLER,** Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Physikalische Aufgabensammlung. Mit den Resultaten. Neu bearbeitet von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Vierte, verbesserte Auflage. Sammlung Göschen Bd. 243. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 136 S. Preis 1,80 M.

Zur Aufklärung über Eichung und Normung. Staatliche Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Berlin 1930. 16 S.

LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Professor der Mathematik an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin, Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 22 Abb. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. VI. Verlag Springer, Berlin 1930. XIII + 398 S. Preis 21 M, geb. 22,80 M.

Dr. ANTON **KILLERMANN,** Oberstudienrat und Konrektor am hum. Gymnasium Schweinfurt. Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes. Verlag Tagblatt-Druckerei, Schweinfurt 1930. 22 S. Preis 2 M.

Dr. BELA **VON JUHOS,** Das Problem der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Verlag Ernst Reinhardt, München 1930. 83 S. Preis 5 M.

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** ord. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Vermessungskunde II. Messung von Horizontalwinkeln. Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Abb. Dritte Auflage. Sammlung Göschen Nr. 469. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 148 S. Preis 1,80 M.

[1]) **Berichtigung zur Anzeige in Heft 3, S. 311.**

AUGUST **HERTWIG,** Johann Wilhelm Schwedler. Sein Leben und sein Werk. Bearbeitet und herausgegeben im Auftrage der Akademie des Bauwesens. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1930. 140 S. Preis 17 M.

Dr.-Ing. R. **BIEL,** Die wirtschaftlich günstigsten Rohrweiten. Ihre Bestimmung für die Fortleitung von Wasser, Wasserdampf und Gas. Mit 12 Abb. und 14 Zahlentafeln im Text und 7 Kurventafeln im Anhang. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1930. 75 S. Preis geh. 12 M.

Professor Dr. GERHARD **HESSENBERG,** Grundlagen der Geometrie. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. Göschens Lehrbücherei 1. Gruppe. Reine und angewandte Mathematik Bd. 17. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 141 S. Preis 7,80 M.

Dr. G. **HOHEISEL,** a. o. Professor in Breslau. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. Sammlung Göschen Nr. 920. Verlag Walter de Gruyter & Co. 159 S. Preis 1,80 M.

Dr. W. **HEISENBERG,** Professor für theoretische Physik an der Universität Leipzig. Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Mit 22 Abb. im Text. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1930. VI + 117 S.

AUREL **WINTNER,** Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik. Mit einer Einleitung von Leon Lichtenstein, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1929. XII + 280 S.

Dr.-Ing. ehr., Dr. H. **ZIMMERMANN,** Wirkl. Geh. Oberbaurat. Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Inhaber der Grashof-Denkmünze. Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage. Mit 20 Bildern im Text. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1930. VIII + 91 S. Preis 12,50 M geb.

Dr.-Ing. FERD. **SCHLEICHER,** Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Statik. I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Mit 47 Abb. Sammlung Göschen Nr. 178. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 143 S. Preis 1,80 M.

RUDOLF **FRANKE,** Eine vergleichende Schalt- und Getriebelehre. Neue Wege der Kinematik. Vortrag gehalten auf der wissenschaftlichen Tagung zur Feier des hundertsten Geburtstages von Franz Reuleaux am 11. November 1929 in der Technischen Hochschule zu Berlin. Mit 81 Abb. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1930. Preis geh. 4 M.

Dr. WERNER **ROGOSINSKI,** a. o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg. Fouriersche Reihen. Mit 4 Figuren. Sammlung Göschen Nr. 1022. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 135 S. Preis 1,80 M.

Dr.-Ing. ERNST **LEHR,** Oberingenieur in Darmstadt. Schwingungstechnik. Ein Handbuch für Ingenieure. Erster Band: Grundlagen. Die Eigenschwingungen eingliedriger Systeme. Mit 187 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1930. XXIII + 295 S. Preis 24 M, geb. 25,50 M.

FRANCOIS **BOUNY,** Ingénieur Doyen de la Faculté technique du Hainaut. Leçons de Mécanique Rationelle. Tome Premier: Calcul vectoriel — Cinématique — Statique — Potentiel avec 284 exercices et leurs solutions. VIII + 600 S. — Tome Deuxième: Dynamique du Point — Dynamique des systèmes avec 164 exercices et leurs solutions. VIII + 659 S. Verlag Blanchard (Paris), Leich (Mons) 1924 u. 1929.

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt E. V. (W. G. L.) 1929. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin. 227 S.

WERNER **HEISENBERG,** Professor of Physics, University of Leipzig. The physical Principles of the Quantum Theory. Translated into English by Carl Eckart and Frank C. Hoyt Department of Physics, University of Chicago. The University of Chicago Press; Chicago, Illinois. 1930. VIII + 186 S.

NACHRICHTEN

III. Internationaler Kongreß für technische Mechanik. Entsprechend unseren früheren Mitteilungen fand in der Zeit vom 24. bis 29. August in Stockholm der dritte Internationale Kongreß für technische Mechanik statt. Weit über vierhundert Teilnehmer aus 32 Ländern hatten sich eingefunden. Die Verhandlungen fanden im Reichstagsgebäude statt.

Sonntag, den 24. versammelte sich zum erstenmal das Internationale Kongreßkomitee. Den Vorsitz führte Herr Axel F. Enström, Präsident der Kgl. Schwedischen Akademie der Ingenieurwissenschaften, unterstützt von dem Generalsekretär E. H. W. Weibull. Mit allgemeinem Bedauern wurde die Nachricht aufgenommen, daß Herr C. W. Oseen-Uppsala, der führende Vertreter der Mechanik in Schweden, der vor vier Jahren in Zürich als Mitglied des Internationalen Kongreßkomitees die Einladung zur Tagung in Stockholm überbracht hatte, durch Krankheit an persönlicher Teilnahme an den Beratungen verhindert sei. Demgemäß mußte auch der von Herrn Oseen angekündigte einleitende Vortrag über das Turbulenzproblem ausfallen. Die sachlichen Verhandlungen des Kongresses begannen Montag vormittag und wurden ohne Unterbrechung in Vor- und Nachmittagssitzungen bis einschließlich Freitag vormittag fortgeführt. Alle Vorträge, auch die allgemeinen Charakters, waren

auf vier Sektionen verteilt. Für jeden Spezialvortrag war einschließlich der Diskussion eine halbe, für die allgemeinen Vorträge je eine volle Stunde vorgesehen und durch genaue Einhaltung der Zeiten wurde dafür gesorgt, daß der Besuch bestimmter Vorträge in verschiedenen Sektionen leicht möglich war. Ueberdies gab am Ende der Nachmittagssitzungen stets noch eine freigehaltene Stunde Gelegenheit zu allgemeinen Diskussionen. Die Themen der angekündigten allgemeinen Vorträge sind in Heft 2 mitgeteilt worden. Leider verbietet es die große Zahl der übrigen Vorträge auch nur andeutungsweise über die einzelnen zu berichten. Das schwedische Kongreßkomitee hat alle Vorbereitungen getroffen, um den vollständigen Bericht über die Verhandlungen nach möglichst kurzer Zeit erscheinen zu lassen.

Will man mit ganz wenigen Worten das wissenschaftliche Gesamtbild, das der Kongreß bot, kennzeichnen, so wird man sagen müssen, daß ihm die Sensationen fehlten und die Entwicklung in ein ruhiges und breites Bett geleitet erscheint. Als Kernpunkt des Interesses heben sich wie in den letzten Jahren ab: Die Frage der Aufklärung der turbulenten Bewegungserscheinungen (Berichte von Oseen, Eisner, Vorträge von v. Kármán, Prandtl u. a.), sowie die Erweiterung der Mechanik fester Körper außerhalb der Grenzen der Elastizitätstheorie (Bericht von v. Mises, zahlreiche Einzelvorträge). Dagegen sind die Aufgaben der Ausgestaltung der Elastizitätstheorie in ihrer Anwendung auf Einzelprobleme und ganz besonders die Probleme der technischen Kinetik (Maschinenlehre) stark in den Hintergrund getreten. Doch gab es auch hier interessante Beiträge (Meißner, Barillon u. a.).

Allgemeine Anerkennung fand die sorgfältige Vorbereitung und reibungslose technische Durchführung des Kongresses, die in erster Linie der aufopferungsvollen Tätigkeit der schwedischen Fachkollegen, vor allem des Generalsekretärs Herrn Weibull, zu verdanken war, dem sich eine große Zahl von Damen und Herren zur Mitarbeit zur Verfügung gestellt hatten. Die gesellschaftlichen Veranstaltungen, der Empfang durch die Ingenieurakademie, das Fest im prunkvollen Stadthaus von Stockholm und der Ausflug nach Saltsjöbaden werden allen Teilnehmern in freundlicher Erinnerung beiben.

In der Schlußsitzung des Kongresses wurde auf Vorschlag des Internationalen Kongreßkomitees beschlossen, den nächsten Kongreß 1934 in Cambridge (England) abzuhalten. In das Internationale Kongreßkomitee wurden neu aufgenommen die Herren: M. T. Huber für Polen, K. Körner für die Tschechoslowakei und K. Popoff für die Balkanländer.

Mises 111

Ingenieur-Ausbildung. Der Deutsche Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine in Verbindung mit dem Deutschen Ausschuß für Technisches Schulwesen und dem Verein deutscher Ingenieure hat im Juni ds. Js. einen Aufruf erlassen, der sich mit einer wichtigen Frage der Ingenieur-Ausbildung beschäftigt Wir geben daraus die folgenden entscheidenden Sätze wieder, die sich mit den Bestrebungen, die unsere Zeitschrift verfolgt, berühren.

»Die drei unterzeichneten Verbände haben aber immer wieder die Beobachtung machen müssen, daß über den wahren Sinn des Studiums verhängnisvolle Irrtümer verbreitet sind. Vielfach wird nicht erkannt, daß bei der technischen Ausbildung mehr als in andern Wissenszweigen ein Lehrgebiet auf dem andern aufgebaut ist und daher den grundlegenden, in den ersten Semestern gelehrten Fächern eine besondere Bedeutung zukommt. Ein Studierender wird den Vorlesungen in den höheren Semestern nur dann mit Nutzen folgen können, wenn er sich u. a. durch eigene Arbeit mit den mathematischen und naturwissenschaftlichen Grundlagen so vertraut gemacht hat, daß sie zu seinem geistigen Besitz geworden sind, und er sich ihrer wie eines vertrauten Werkzeuges bedienen kann.

Hieraus folgt, daß den jungen Studierenden der wohlgemeinte Rat gegeben werden muß, sogleich in den ersten Semestern mit Eifer das Studium dieser wichtigen Fächer aufzunehmen, keine Zeit unnütz zu vertun, keine Ausbildungsmöglichkeit zu versäumen..... Auf der anderen Seite muß aber die dringende Mahnung an die Studierenden gerichtet werden, vor allem die Grundlage ihres technischen Wissens so stark und so breit wie eben möglich zu legen. Nur so werden sie den Anforderungen zu entsprechen vermögen, die Beruf und Leben später an sie stellen.« 117

Persönliches. Hr. Prvdzt. Dr. E. J. Gumbel in Heidelberg ist zum n. b. a. o. Professor ernannt worden. 117

Hr. Prof. Dr. Th. v. Kármán-Aachen wird künftig seine Tätigkeit zwischen Aachen und Pasadena in Californien teilen. Er übernimmt in Aachen eine Professur für höhere Mathematik für Ingenieure in jedem Sommer-Semester und in Pasadena eine Professur für Flugwissenschaft im Winter-Semester. Hr. Prof. Dr. L. Hopf vertauscht seine Professur für Mathematik mit der für Mechanik an der Technischen Hochschule Aachen.

(Redaktionsschluß 18. Oktober 1930.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade G. m. b. H., Berlin N 65.